# الإقتصاد القياسي

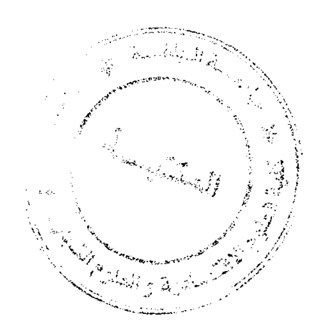
الأستاذ الدكتور
حسين علي بخيت
كلية الإدارة والإقتصاد - جامعة بغداد
جامعة الزيتونة الأردنية حالياً

الدكتورة
سحر فتح الله
كلية الإدارة والإقتصاد - جامعة بغداد



www.yazori.com
اليازوري





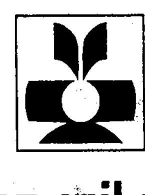
# الإقتصاد القياسي

# الإقتصاد القياسي

الأستاذ الدكتور
**حسين علي بخيت**
كلية الإدارة والإقتصاد - جامعة بغداد
جامعة الزيتونة الأردنية حالياً

الدكتورة
**سحر فتح الله**
كلية الإدارة والإقتصاد - جامعة بغداد







# الإهداء

إلى /

زوجتي .... اعتزازاً ووفاءً

بناتي ... رفال، رولى

وأولادي...زيدون،خلدون....حباً وإخلاصاً

حسين

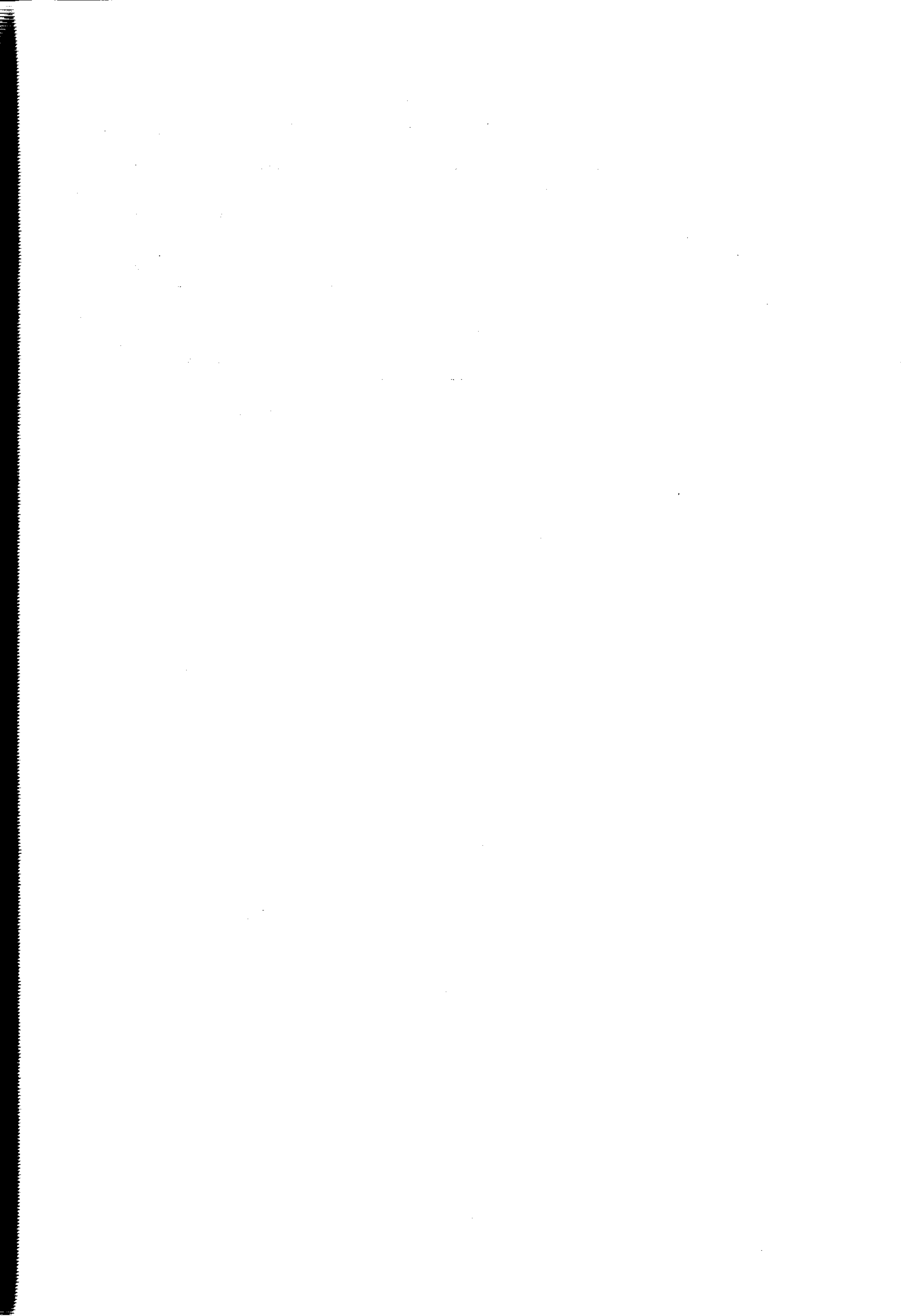
إلى /

والديّ ... أطال الله عمرهما

أسرتي.... زوجي وبناتي حباً وتقديراً

سحر

# المحتـــويات



# تمـــــــهيــــــــد:

قد يكون من الغريب القول ان الأسلوب الأمثل للوصول إلى الغاية من دراسة الاقتصاد القياسي هو معرفة ما هو مطلوب من دراسة العلوم المقاربة له للتمكن من تمييزه عنها، ونعني بالعلوم المقاربة هي الإحصاء الاقتصادي والاقتصاد الرياضي.

وبينما يهتم الاقتصاد الرياضي بالنظرية الاقتصادية وصياغتها بأسلوب رياضي، يتوقف عند هذا الحد، لأن ذلك يتم بدون إجراء اختبار لمعرفة مدى مطابقتها للمنطق الاقتصادي، يهتم الإحصاء الاقتصادي بالمقابل بتجميع وتبويب البيانات الاقتصادية، وهو أيضا لا يعير أية أهمية لتحليل نتائج هذه البيانات، ولكن الذي يميز الاقتصاد القياسي عن الإحصاء الاقتصادي والاقتصاد الرياضي هو اهتمامه بالأسس القياسية والاختبارات التجريبية للفرضيات الاقتصادية. غير ان العلاقة بين هذه العلوم وطيدة، حيث نجد أثر ذلك عندما يستخدم الاقتصاد القياسي ما متاح من البيانات التي يوفرها الإحصاء الاقتصادي بغية تحديد العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية وتفسيرها ثم استخدام النتائج المتحققة للتنبؤ والتحليل. وهو بالمقابل يعتمد -أي الاقتصاد القياسي- على الاقتصاد الرياضي في وصفه للفرضيات التي تعتمد على التسبيب النظري بشكل رقمي أو عددي، ومن ثم تقييمها.

وبعبارة موجزة فان الاقتصاد القياسي يحاول الاستفادة من عملية الجمع الحاصلة بين النظرية الاقتصادية والأساليب الرياضية، في إطار الاقتصاد الرياضي، ثم الاستعانة بالطرق الإحصائية للحصول على تقديرات كمية لاستخدامها في عمليات اتخاذ القرار والتنبؤ ودراسة التغيرات الهيكلية.

وقد تم عرض نظرية الاقتصاد القياسي في هذا الكتاب في أحد عشر فصلا، تضمن الفصل الأول منه مقدمة للتعريف بالاقتصاد القياسي وأهدافه وعلاقته بالعلوم الأخرى. أما الفصل الثاني فقد تم فيه التطرق إلى تحليل الانحدار الخطي البسيط

بطريقة المربعات الصغرى واختبار الفرضيات في فصل ثالث، ليتخصص الفصل الرابع في وصف الانحدار الخطي المتعدد واختبار فرضياته. أما مشاكل النموذج الخطي والمتمثلة بمشكلة الارتباط الذاتي ومشكلة التعدد الخطي ومشكلة عدم ثبات تجانس التباين فقد تم استعراضها في الفصول الخامس والسادس والسابع على التوالي.

ولبيان طبيعة المعادلات الآنية ومشكلة التحيز الآني وطرق التقدير كان الفصل الثامن بعنوان نماذج المعادلات الآنية، ليكون الفصل التاسع وقفة لعرض مشكلة التشخيص وبيان طبيعة المشكلة وشروط التشخيص، أما الفصل العاشر فقد تم فيه استعراض المتغيرات المرتدة زمنيا بشكل مفصل، ليكون الفصل الحادي عشر محطة أخيرة لعرض ثلاثة من نماذج الانحدار تتضمن متغيرات وهمية عنوانه المتغيرات الوهمية.


| الأستاذ الدكتور حسين علي بخيت | الدكتورة سحر فتح الله |
|---|---|
| كلية الإدارة والاقتصاد | كلية الإدارة والاقتصاد |
| جامعة بغداد/جامعة الزيتونة الاردنية حالياً | جامعة بغداد |


2006

# الفصـــــــل الأول: المقدمـــــــة

**1.1 تعريف الاقتصاد القياسي.**

**2.1 أهداف الاقتصاد القياسي.**

**3.1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى.**

**4.1 النموذج الاقتصادي.**

**5.1 أنواع النماذج.**

**6.1 مكونات النموذج.**

**7.1 منهجية الاقتصاد القياسي.**

**8.1 أسلوب الاقتصاد القياسي.**

# الفصل الأول: المقدمـــــــــــــــــة

## 1.1 تعريف الاقتصاد القياسي، Definition of Econometrics:

يعـــد الاقتصـــاد القياسي، Econometrics، أسلوب من أساليب التحليل الاقتصـــادي يهتم بالتقدير العددي (الكمي) للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية معتمداً فـــي ذلـــك علـــى الـــنظرية الاقتصـــادية، Economic Theory، والرياضـــيات، Mathematics، والإحصـــاء، Statistics، للوصـــول إلـــى هدفه الخاص باختبار الفروض والتقدير ومن ثم التنبؤ بالظواهر الاقتصادية.

هـــذا يعنـــي ان الاقتصاد القياسي يحاول الاستعانة أولاً بالنظرية الاقتصادية لـــتحديد المشكلة المراد دراستها ولأهم المتغيرات الاقتصادية والاجتماعية التي تؤثر فيها، ومن ثم يستعين بالاقتصاد الرياضي لتوصيف العلاقات القائمة بين المتغيرات في شـــكل رمـــوز ومعـــادلات، وأخـــيراً يستعين بعلم الإحصاء فيستفيد منها في تطوير واســـتنباط طـــرق القـــياس لتقدير معالم الصيغ المقترحة واختبار الفروض ومن ثم الوصول إلى النتائج الدقيقة التي يمكن الاعتماد عليها في التنبؤ بالمشكلة المدروسة.

بذلـــك يمكـــن القول بأن الاقتصاد القياسي هو تكامل للنظرية الاقتصادية مع الرياضـــيات والأساليب الإحصائية بهدف اختبار الفروض عن الظواهر الاقتصادية، وتقدير معاملات العلاقات الاقتصادية، والتنبؤ بالقيم المستقبلية للظواهر الاقتصادية.

علـــيه يمكـــن تعريف الاقتصاد القياسي بأنه علم اجتماعي تستخدم فيه أدوات النظرية الاقتصادية والرياضيات والإحصاء لتحليل الظواهر الاقتصادية، وأنه يتكون من كلمتين أصلهما إغريقي Economy، اقتصاد، و Metrics والتي تعني قياسات.

## 2.1 أهداف الاقتصاد القياسي، The Goals of Econometrics:

يمكن التعرف على ثلاث أهداف أساسية للاقتصاد القياسي هي:

**أولاً: تحليل واختبار النظريات الاقتصادية المختلفة:**

إن تحليل واختبار النظريات الاقتصادية، يعد هدفاً رئيساً من أهداف الاقتصاد القياسي، ولا يمكن عَد النظرية الاقتصادية صحيحة ومقبولة ما لم تجتاز اختباراً كمياً عددياً يوضح قوة النموذج ويفسر قوة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

**ثانياً: رسم السياسات واتخاذ القرارات:**

يساهم الاقتصاد القياسي برسم السياسات واتخاذ القرارات عن طريق الحصول على قيم عددية لمعلمات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات لتساعد رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات الحالية من حيث توفيره لصيغ وأساليب مختلفة لتقدير المرونات والمعلمات الفنية والتكلفة الحدية والإيرادات الحدية، والميل الحدي للاستهلاك والادخار والاستثمار وغير ذلك. وتأسيساً على ذلك فأن معرفة القيم العددية لمعلمات النموذج المقدّر تساعد على إجراء المقارنات واتخاذ القرار المناسب سواءً على مستوى المنشأة أو الدولة.

**ثالثاً: التنبؤات بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل:**

يساعد الاقتصاد القياسي رجال الأعمال والحكومات في وضع السياسات من خلال توفير القيم العددية لمعلمات، Parameters، المتغيرات الاقتصادية والتنبؤ بما ستكون عليه الظاهرة الاقتصادية مستقبلاً. ان هذه التنبؤات تمكن واضعي السياسة ومتخذي القرار لتنظيم الحياة الاقتصادية واتخاذ إجراءات معينة للتأثير في متغيرات اقتصادية معينة، مثال ذلك، لو أرادت الحكومة معرفة الآثار المحتملة للسياسة النقدية على التضخم والبطالة، وما هو الأثر المتوقع لزيادة أسعار السلع البديلة أو المكملة

على الكمية المطلوبة من السلعة الأصلية، حيث ان الاقتصاد القياسي سوف يحدد مستوى الكمية فيما إذا كان مرتفعاً أو منخفضاً وهكذا لبقية الظواهر الاقتصادية وما يتعلق بها مستقبلاً.

## 3.1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى:

للاقتصاد القياسي علاقة وثيقة بالنظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي، الإحصاء الاقتصادي، والإحصاء الرياضي، ان هذه الفروع تتكامل من أجل توفير قيم عددية لمعلمات المتغيرات الاقتصادية المختلفة، إلا إن أياً من هذه الفروع لا يعد بديلاً عن الاقتصاد القياسي، ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

1- تقوم النظرية الاقتصادية بدراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية فتنص النظرية الاقتصادية الجزئية مثلاً على ان زيادة سعر سلعة ما تسبب انخفاضاً في الطلب عليها، فتفترض هذه النظرية وجود علاقة عكسية بين السعر والكمية المطلوبة من السلعة، ولكنها لم تعط أي قياس عددي للعلاقة بين هذين المتغيرين فلم تبين مقدار الانخفاض للكمية المطلوبة المصاحب لتغير معين في السعر فتصبح هذه المهمة من مهمات الاقتصاد القياسي بعد توصيفه رياضياً.

بذلك يمكن القول ان العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المستوحاة من النظرية الاقتصادية تبقى مسألة مجردة ما لم يتم تقديرها أي تقدير معالمها في ضوء البيانات الإحصائية الواقعية والتي هي من مهمات القياس الاقتصادي (تحديد الطابع الكمي للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية الجارية في واقع معين وذلك بالاسترشاد بالنظرية الاقتصادية).

2- يهتم الاقتصاد الرياضي بإعادة صياغة العلاقة التي تم تحديدها بالاعتماد على النظرية الاقتصادية رياضياً أي على هيئة معادلات ورموز رياضية بدون قياس

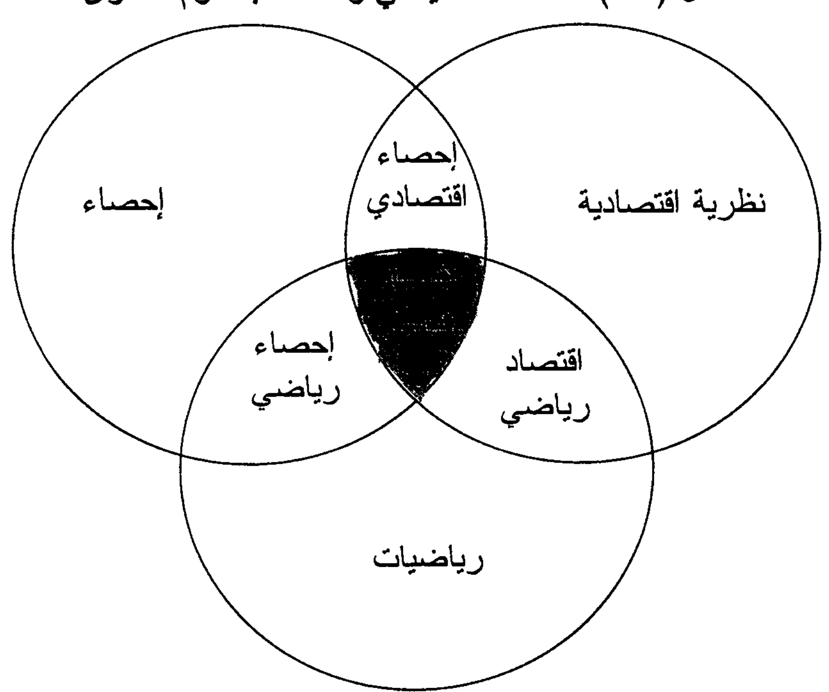
أو برهـــنة عدديـــة لتلك الصياغات، فالقياسات والبرهنة العددية هي من مهمات القياس الاقتصادي.

3- الإحصـــاء الاقتصــــادي يقتصـــر دوره على تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بالمتغـــيرات الاقتصادية التي تتكون منها العلاقات المحددة في (1) و(2) أعلاه وتســـجيلها وجدولـــتها أو رســـمها وينصب دور القياس الاقتصادي على تحليل واختبار نوع العلاقة بين المتغيرات بهدف معرفة مدى مطابقة النتائج مع منطوق النظرية الاقتصادية.

4- أمـــا مـــادة الإحصاء الرياضي فهي تجهز الباحث بأدوات تحليلية يستخدمها في دراسة العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية وبطرق خاصة لمعالجة أخطاء التقدير تمهيداً لاستخدامها في تحقيق أهداف القياس الاقتصادي.

لذلـــك يمكن النظر إلى علم القياس الاقتصادي على انه نقطة التقاء ثلاث علوم رئيسة هي الاقتصاد والرياضيات والإحصاء كما مبين في الشكل (1.1).

**الشكل (1.1): الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الأخرى.**



يتضح مما تقدم ان النظرية الاقتصادية تعطينا فكرة عامة حول شكل العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية ويأتي دور الاقتصاد القياسي لتحديد المقدار الكمي لتلك العلاقة بالاعتماد على الاقتصاد الرياضي الذي يحاول تصوير العلاقة المذكورة بشكل معادلة رياضية، وطرق الإحصاء الرياضي لملائمتها لطبيعة العلاقة القائمة، كل ذلك يتحقق بالاعتماد على الإحصاء الاقتصادي الذي يغذي القياس الاقتصادي بالمادة الأولية اللازمة للتحليل في صورة بيانات مجمعة ومبوبة وبدون هذه البيانات تصبح عملية القياس أمراً مستحيلاً.

## 4.1 النموذج الاقتصادي، Economic Model:

يعرف النموذج الاقتصادي بأنه مجموعة من العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية لتمثيل ظاهرة معينة بصورة خالية من التفاصيل والتعقيدات ولكنها ممثلة للواقع بهدف تعليلها أو التنبؤ بها والسيطرة عليها. وقد يتكون من معادلة واحدة، Single Equation، مثل معادلة الطلب أو معادلة العرض ويسمى عندئذٍ النموذج بكونه نموذج ذات معادلة منفردة، أو من مجموعة من المعادلات وتسمى بالمعادلات الآنية، Simultaneous Equation، كنموذج السوق.

وقد يكون الهدف من النموذج هو تقدير قيم عددية لمعلمات علاقة بين متغيرات اقتصادية بغية التنبؤ أو تحليل هيكل اقتصادي أو تقييم سياسة اقتصادية. ويستخدم النموذج الاقتصادي الرموز الرياضية فمثلاً تفترض النظرية الاقتصادية بأن الاستهلاك C، دالة في الدخل، Y، أي ان:

$$C = f(Y) \qquad .....(1.1)$$

إذ تمثل C المتغير الاستجابة، Dependent variable، أما Y فيمثل المتغير التوضيحي، Independent variable، وتحكم العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية بعدد من الصيغ أبسطها الصيغة الخطية، فبتحويل العلاقة (1.1) إلى صيغتها الخطية تكون:

$$C = B_0 + B_1 Y \qquad .....(2.1)$$

حيث تمثل $B_0$ ، $B_1$ المعلمات، Coefficients، ويمكن ان توضح من الناحية الرياضية على النحو الآتي:

$B_0$: تمثل معاملة التقاطع وهي عبارة عن المسافة العمودية المحصورة بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور العمودي، وتمثل $B_0$ قيمة C عندما تكون قيمة Y مساوية للصفر ويطلق عليها بالاستهلاك الذاتي.

$B_1$: تمثل ظل الزاوية التي يصنعها خط الانحدار مع مستوى الأفق وتسمى بالميل، Slope، الحدي لخط الانحدار، وتمثل قيمة $B_1$ الزيادة الحاصلة في قيمة المتغير التابع، C، نتيجة زيادة المتغير التوضيحي، Y، بمقدار وحدة واحدة. بعبارة أخرى إذا زاد الدخل Y بمقدار وحدة واحدة من $Y_1$ إلى $Y_2$ يصبح قيمته $(Y_1+1)$ يترتب على ذلك زيادة في قيمة الاستهلاك، C، من $C_1$ إلي C2 ولنفترض بمقدار $\Delta C$. وبالإمكان إثبات ان الزيادة في المتغير التابع $\Delta C$ يساوي قيمة الميل $B_1$، رياضياً وبيانياً.

أ. **رياضيـــاً:**

$$C = B_0 + B_1 Y$$

عندما **يزداد** المتغير المستقل Y بمقدار **وحدة واحدة، نحصل على:**

$$C + \Delta C = B_0 + B_1(Y + 1)$$

$$C + \Delta C = B_0 + B_1 Y + B_1$$

نعوض عن قيمة C بما يعادلها:

$$B_0 + B_1 Y + \Delta C = B_0 + B_1 Y + B_1$$

وبعد الاختصار ، نحصل على:

$$\Delta C = B_1$$

وفـــي ضوء ذلك يمكن القول ان الميل الحدي للاستهلاك يمثل مقدار الزيادة الحاصلة في C بنسبة زيادة Y بمقدار وحدة واحدة، أي ان:

$$B_1 = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

وبما ان:

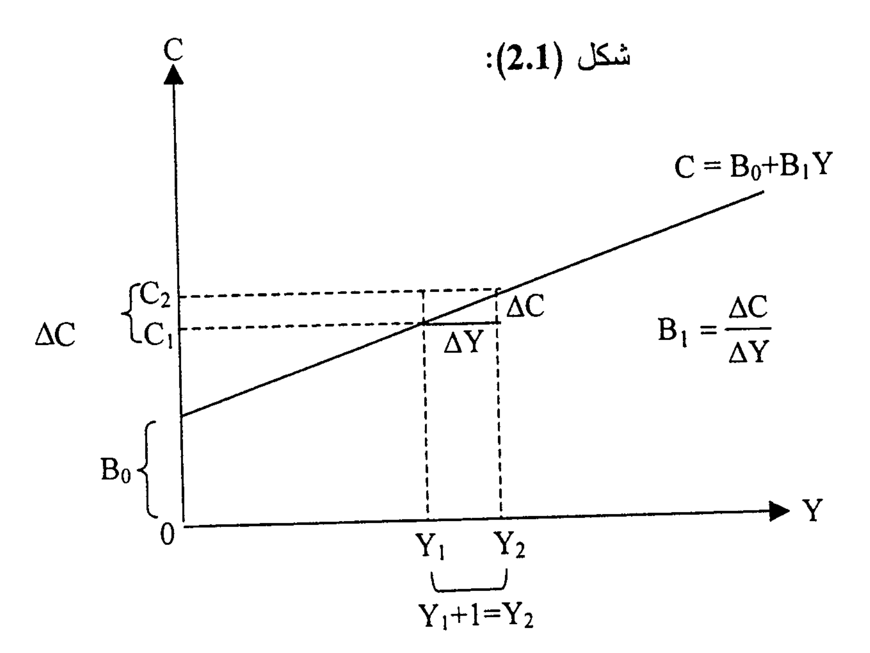
$$\Delta Y = 1$$

إذن:

$$\therefore B_1 = \Delta C$$

**ب- بيانيـــاً:**

**شكل (2.1):**



وتأسيساً على ذلك هناك عدة خصائص مرغوب فيها لأي نموذج اقتصادي منها:

1- مطابقته للنظرية الاقتصادية، بحيث يصف الظاهرة الاقتصادية بشكل صحيح.

2- قدرتـــه على توضيح المشاهدات الواقعية، بحيث يكون متناسقاً مع السلوك الفعلي للمتغيرات الاقتصادية التي تحدد العلاقة بين هذه المتغيرات.

3- دقته في تقدير المعلمات، ان هذه التقديرات يجب ان تكون أفضل تقريب للمعلمات الحقيقـــية. وتأتـــي هذه الدقة من اتصاف هذه التقديرات بصفات مرغوبة يحددها الاقتصاد القياسي مثل خاصية عدم التحيز، Unbaise، وكفاءتها.

4- قدرة النموذج الاقتصادي على التنبؤ، بحيث يعطي تنبؤات مرضية للقيم المستقبلية للمتغيرات المعتمدة.

5- خاصـــية البساطة، إذ ان النموذج الاقتصادي يجب ان يبرز العلاقات الاقتصادية بأقصى حد ممكن من البساطة، فكلما قلّت عدد المعادلات وكان شكلها الرياضي ابسط اعتبر النموذج الاقتصادي أفضل من غيره شريطة ان لا يكون على حساب الدقة في التقدير.

## 5.1 أنـــواع النمـــاذج:

هناك عدة أنواع من النماذج التي يمكن تصنيفها كالآتي:

**1- النماذج الاقتصادية الكلية والجزئية:**

أ- النماذج الاقتصادية الكلية: وهي النماذج التي تتعامل مع المتغيرات الاقتصادية التي تخص الاقتصاد الكلي أي تتصل بالسلوك العام والبنية العامة للاقتصاد كالدخل القومي، الاستثمار العام،...الخ.

ب- النماذج الاقتصادية الجزئية: وهي النماذج التي تتعامل مع المتغيرات الاقتصادية التي تخص الوحدات الاقتصادية الجزئية كعلاقة العرض والطلب على سلعة معينة.

**2- النماذج الاقتصادية الساكنة والمتحركة:**

أ- النماذج الاقتصادية الساكنة: وهي النماذج التي لا يكون الزمن أحد متغيراتها أو مؤثـــراً في تغيير قيم أحد المتغيرات الداخلة فيها، أي بدون فترة ارتداد زمني، وهذا يعني ان لكل متغير قيمة معينة في السنة التي يقع فيها، فمثلاً تكون دالة الطلب الساكنة كالآتي:

$D_t = f(P_t)$

ب- النماذج الاقتصادية المتحركة: وهي النماذج التي يكون الزمن أحد متغيراتها او مؤثـــراً في أحد متغيراتها، ان هذه النماذج توضح كيفية تأثير الزمن في المتغـــيرات الاقتصــــادية، وتعد هذه النماذج أكثر واقعية، فمثلاً تكون دالة العرض المتحركة كالآتي:

$S_t = f(P_{t-1})$

أي ان العـــرض فـــي الســـــنة الحالية (t) تعتمد على سعر السلعة في السنة السابقة (t-1) ويسمى المتغير الحركي بمتغير مرتد زمنياً مثل ($P_{t-1}$).

## 6.1 مكونات النموذج:

**أولاً: معادلات النموذج:**

يـــتكون النموذج الاقتصادي من مجموعة من المعادلات تسمى هذه بالمعادلات الهيكلية لأنها توضح الهيكل الأساس للنموذج المراد بناؤه، وتختلف عدد المعادلات من نموذج لآخر تبعاً لنوع النموذج والهدف من بنائه. وتنقسم المعادلات الهيكلية إلى:

- **المعـــادلات السلوكية:** هي المعادلات التي تعبّر عن العلاقات الدالية بين المتغيرات الاقتصــــادية ويمكن التعبير عنها بدالة ذات متغير مستقل واحد أو عدة متغيرات مستقلة.

- **المعـــادلات التعريفية او المتطابقات:** هي المعادلات التي تعبر عن علاقة اقتصادية ناتجـــة عن تعاريف متفق عليها أو هي العلاقة التي تحدد قيمة المتغير التابع بتحديد تعريف له في صورة علاقة مساواة.

**ثانياً: متغيرات النموذج:**

تـــتكـــــون معادلات النموذج من عدد من المتغيرات يمكن تصنيفها إلى عدة أنواع وكما يأتي:

- **المتغـــيرات الداخلـــية:** وهي المتغيرات التي تؤثر في النموذج وتتأثر به، وتتحدد قيمـــتها مـــن داخـــل الـــنموذج عن طريق المعاملات وقيم المتغيرات الخارجية وتسمى هذه المتغيرات (الداخلية) أيضاً بالمتغيرات التابعة.
- **المتغيرات الخارجية:** وهي المتغيرات التي تؤثر في النموذج ولا تتأثر به، وتتحدد قيمتها بعوامل خارجة عن النموذج وفي بعض الأحيان تتحدد قيمها عن طريق نموذج آخر مختلف عن النموذج الأصلي وتسمى هذه المتغيرات (الخارجية) بالمتغيرات المستقلة.
- **المتغيرات المرتدة زمنياً:** وهي المتغيرات التي تنتمي إلى فترة زمنية سابقة أو التي تؤخـــذ قـــيمها مـــن الفـــترة السابقة مثل ($Y_{t-1}$) التي تمثل دخل السنة الماضية.

**7.1 منهجية الاقتصاد القياسي، Methodology of Economics:**

يهـــتم الاقتصاد القياسي بقياس معاملات، Coefficients، النموذج المستخدم فـــي الـــتقدير والتنبؤ لقيم المتغيرات الاقتصادية، وهذا يتطلب إتباع منهجية معينة في البحث، لان العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية سببية، Causal، أي بمعنى ان التغير

فـــي بعض المتغيرات يحدث أثراً في المتغيرات الاخرى، ويمكن تحديد هذه المنهجية بالخطوات الآتية:

### 1- مرحلة التوصيف، Specification Stage:

تعد مرحلة توصيف (صياغة) النموذج من أهم مراحل بناء النموذج وأصعبها وذلك من خلال ما تتطلبه من تحديد للمتغيرات التي يجب ان يشتمل عليها النموذج أو التـــي يجـــب استبعادها منه. وفي هذه المرحلة يتم الاعتماد على النظرية الاقتصادية الاقتصــــاد الرياضي لتحويل العلاقة المذكورة إلى معادلات رياضية باستخدام الرموز فـــي تحديـــد نـــوع واتجاه العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية، كما يتم الاعتماد على الرياضـــية مثل العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما($D_x$) والسعر ($P_x$) والدخل (Y) حيث تصاغ العلاقة أعلاه كالآتي:

$$D_x = B_0 + B_1 P_x + B_2 Y \qquad ....(3.1)$$

فمن نظرية الطلب يتوقع الحصول على إشارة سالبة للمعامل $B_1$ وذلك لوجود علاقة عكســـية بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعرها حسب النظرية الاقتصادية وإشارة موجبة للمعامل $B_2$ لوجود علاقة طردية بين الكمية المطلوبة ودخل المستهلك، كما يتم هنا جمع البيانات الخاصة بمتغيرات النموذج.

### 2- مرحلة التقدير، Estimation Stage:

في هذه المرحلة يتم جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة الاقتصادية (المشكلة) قيد الدراســـة ، ومـــن ثـــم يتم تقدير معالم العلاقة التي تم وصفها وصياغتها رياضياً في المرحلة الاولى، أي تقدير قيم رقمية للمعالم $B_0$ ، $B_1$ ، $B_2$ في دالة الطلب أعلاه كما

يجب في هذه المرحلة تقييم المعالم المقدرة من النواحي الاقتصادية والإحصائية والقياسية.

فمن الناحية الاقتصادية تجري عملية مقارنة بين قيم وإشارات معالم النموذج التي تم تقديرها مع القيم والإشارات المتوقعة لهذه المعالم في ضوء النظرية الاقتصادية.

ومن الناحية الإحصائية يتم حساب الانحرافات الكلية والجزئية في المتغيرات التي يتكون منها النموذج واختبار معنوية المعالم من خلال اختبار (t) ومعامل التحديد (R2).

أما من الناحية القياسية فيتم اختبار مدى انسجام وتحقق الفروض الخاصة بالمتغير العشوائي على النموذج القياسي المقترح حيث ان وجود الاختلاف يعني وجود مشاكل منها مشكلة الارتباط الذاتي، التعدد الخطي، وعدم ثبات تجانس التباين والتي سيتم التعرف على كلا منها بشكل مفصل وبفصل خاص لكلٍ منها في الفصول اللاحقة.

**3- مرحلة الاختبار، Testing Stage:**

في هذه المرحلة يتم اختبار قوة ومعنوية النموذج المقدر باعتماد طرق إحصائية معينة للتأكد من صلاحية النموذج وقدرته على التنبؤ. وقد يواجه الباحث هنا عدة مشاكل منها مشكلة تغاير حد الخطأ أو الارتباط الذاتي أو الازدواج الخطي وغيرها من المشاكل، وعلى الباحث ان يعالج هذه المشاكل قبل البدء بعملية التقييم.

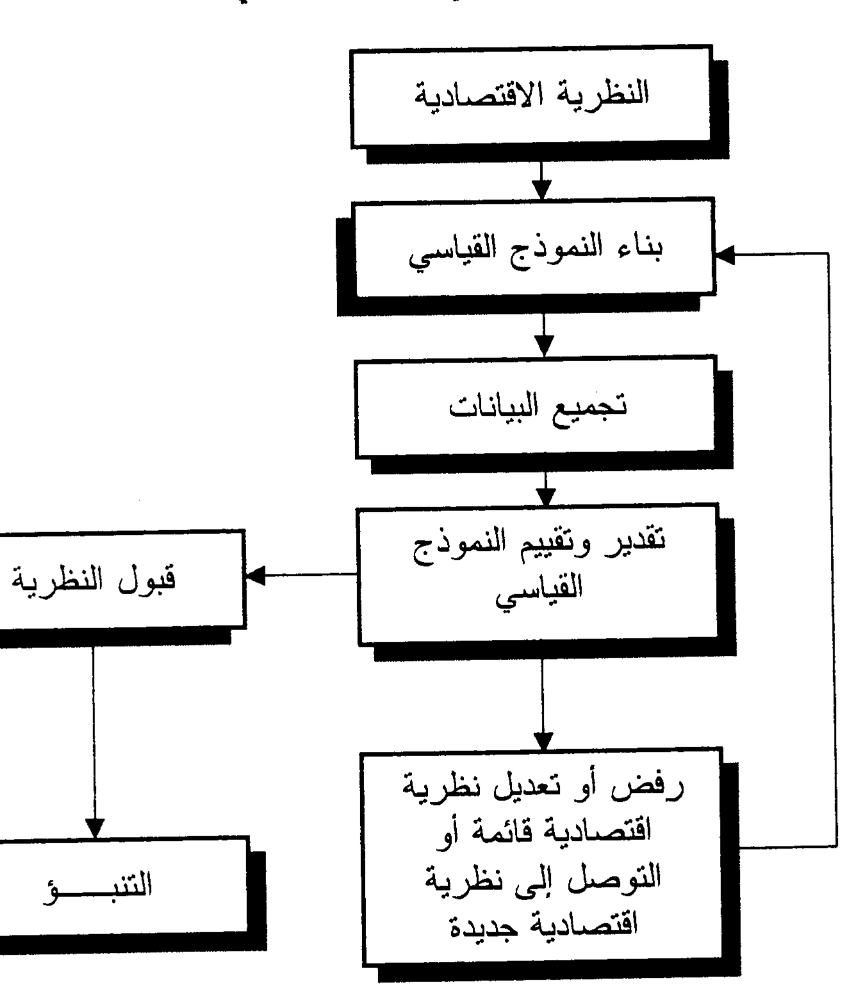
**4- مرحلة التنبؤ، Prediction Stage:**

لا يوجد من يعترض على ضرورة التنبؤ بالمستقبل والتعرف عليه مسبقاً قبل قدومه وعلى مختلف المستويات- الكلية والجزئية- وفي مختلف المجالات الاقتصادية والاجتماعية ولمختلف المدد القصيرة والمتوسطة والطويلة، عليه يتم في هذه المرحلة

أعـــداد تقديـــرات مستقبلية للمتغيرات المدروسة كحجم الطلب على السلعة $(D_x)$ في مثالنا السابق.

ولكـــن قبل استخدام النموذج المقدر في التنبؤ يجب التأكد من جودة الأداء العام للـــنموذج المقـــدر، وبعدئـــذٍ يـــتم تطبـــيق النتائج التي تم التوصل إليها على الواقع واستخدامها في عملية التنبؤ. ويمكن توضيح منهجية البحث في الاقتصاد القياسي كما مبين في الشكل (2.1).

**الشكل (3.1): منهجية البحث في الاقتصاد القياسي.**



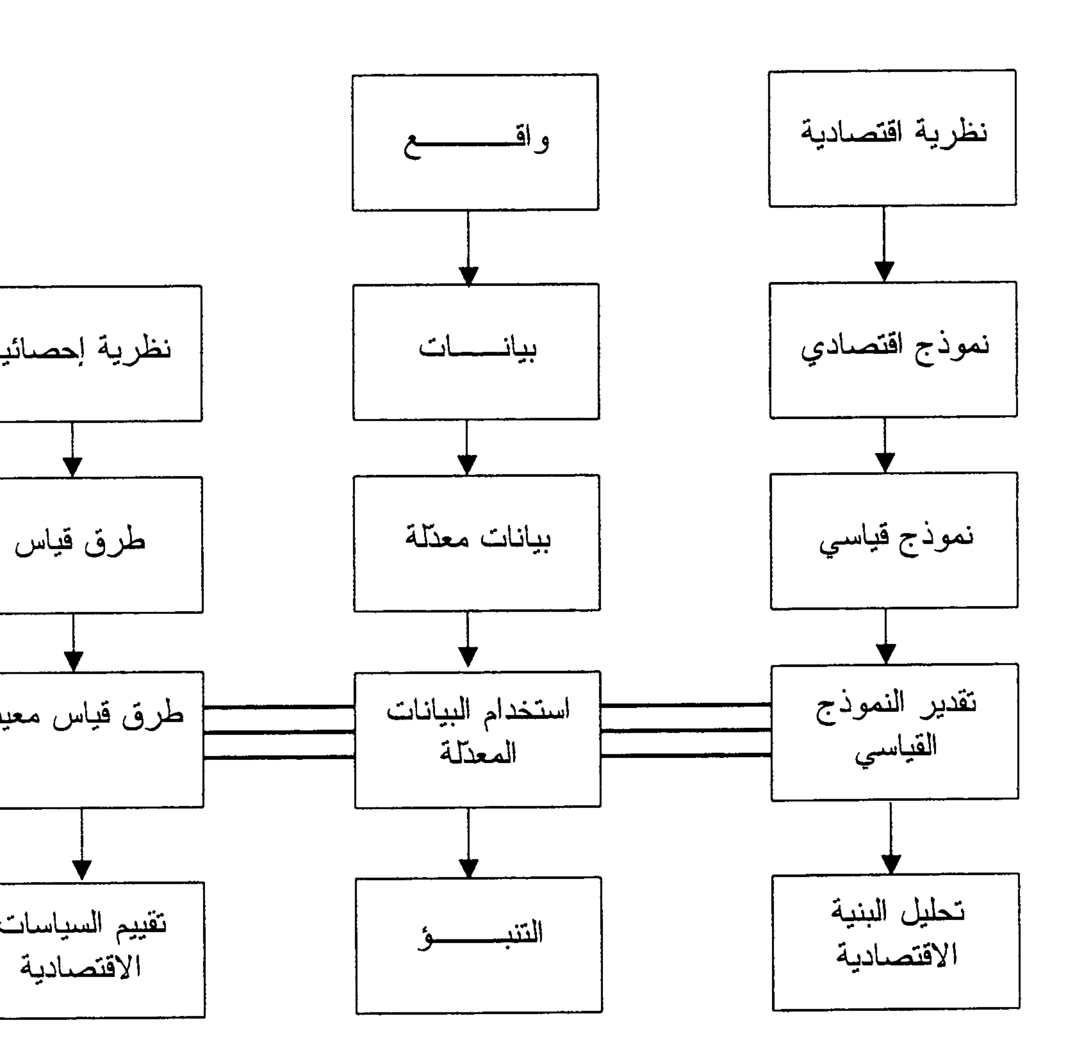
## 8.1 أسلوب الاقتصاد القياسي، Econometrics Approach:

يعتمد أسلوب الاقتصاد القياسي على النظرية الاقتصادية التي تزوده بالنماذج الاقتصـــادية التي تستخدم في تكوين النماذج القياسية، ولغرض تقدير أو تقييم النماذج القياسية ووضعها في شكل كمي، يعتمد الاقتصاد القياسي على الواقع الذي تستقي منه المعلومـــات والبيانات اللازمة لعملية التقدير ومن ثم يقوم بعملية التصحيح أو تعديل البيانات المستقاة من الواقع وتهيئتها للاستخدام.

وبعدها يعود الاقتصاد القياسي إلى نظرية الإحصاء بغرض تطوير واستنساخ طرق القياس وبذلك يكون تحت التصرف نموذج قياسي مع بيانات صالحة للاستخدام مـــع طرق القياس ومن ثم يتم استخدام هذه الإمكانيات في تقدير معلمات أو معاملات النموذج القياسي الذي يجسد العلاقات الاقتصادية.

ومـــن ثـــم يمكـــن استخدام هذا النموذج الذي تم تقديره ، أما في تحليل البنية الاقتصادية أو في التنبؤ أو في تقييم السياسات الاقتصادية، ويمكن عرض ذلك بشكل توضيحي من خلال الشكل (4.1).

**الشكل (4.1): أسلوب الاقتصاد القياسي.**



## أسئلة الفصـــــل الأول

**السـؤال 1.1**: نــاقش الخصائص المرغوبة في النموذج الاقتصادي القياسي مستعيناً بالمعادلات كلما كان ذلك ممكناً.

**السؤال 2.1**: ما هي وظائف مادة الاقتصاد القياسي؟ وكيف تختلف عن وظائف المواد القريبة منها.

**السؤال 3.1**: ما هو أسلوب الاقتصاد القياسي؟

**السؤال 4.1**: ما هي منهجية البحث في الاقتصاد القياسي.



# الفصل الثاني: الانحدار الخطي البسيط

# Simple Linear Regression

1.2 المقدمة.

2.2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي.

3.2 طريقة المربعات الصغرى، OLS.

1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:

1.1.3.2 طريقة الحذف.

2.1.3.2 طريقة المحددات.

3.1.3.2 طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.

4.1.3.2 طريقة المصفوفات.

2.3.2 الخواص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى.

1.2.3.2 الخاصية الخطية.

2.2.3.2 خاصية عدم التحيز.

3.2.3.2 خاصية أفضل مقدر.

4.2 تقدير تباين حد الخطأ العشوائي.

5.2 الأسئلة والتمارين.

# الفصل الثاني: الانـــحدار الخطـــي البســـيط
# Simple Linear Regression

## 1.2 مقدمـــــــــــة:

ان دراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية يتطلب تحديد المتغيرات المؤثرة فـــي تلـــك العلاقة ومن ابسط واسهل أنواع العلاقات في التقدير والتحليل الإحصائي والاقتصادي، العلاقة بين متغيرين أحدهما المتغير التابع، Dependent Variable، والثاني المتغير المستقل، Independent Variable، وإذا رمزنا للمتغيرين بـــY و X وعلى التوالي، فان العلاقة الدالية التي تجمعهما تكون كالآتي:

$$Y = F(x) \qquad \ldots(1.2)$$

حيث يشير الرمز F الى كون المتغيرالتابع Y يعتمد على المتغير المستقل X. ولتحديد شـــكل العلاقـــة هـــذه – مـــا إذا كان خطياً أم غير خطي- يمكن الاستعانة بالنظرية الاقتصـــادية، كمـــا يستعان بالاقتصاد الرياضي والإحصاء لصياغة العلاقة واختبار المتغـــيرات، كما لابد من تحديد شكل العلاقة هذه إذ تحكم العلاقة بين المتغيرات بعدد من الأشكال (الصيغ) ابسطها وأكثرها شيوعاً الصيغة الخطية، وتسمى العلاقة الخطية بيـــن متغيرين بالانحدار الخطي البسيط، Simple Linear Regression، فالعلاقة الخطية بين X ولتكن دخل الأسرة و Y ولتكن الأنفاق على سلعة معينة يمكن ان تكتب بالصيغة الرياضية الآتية:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i \qquad \ldots(2.2)$$

حيث :

$B_1$ و $B_0$ عـــبارة عـــن معلمـــات مجهولة القيم وثوابت يُشرحان من وجهة النظر الرياضية كالآتي:

$B_0$: تمـــثل تقـــاطع خـــط الانحدار مع المحور العمودي وهي عبارة عن القيمة التي تتخذها Y عندما تكون قيمة X مساوية للصفر.

$B_1$: تمثل الميل.

ومـــن وجهـــة الـــنظر الاقتصـــادية تمـــثل $(B_0)$ حالة الكفاف و$(B_1)$ الميل الحدي للاســـتهلاك، وقيمة الميل عبارة عن مقدار الزيادة المتحققة في قيمة المتغير التابع Y نتيجة زيادة المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة.

غـــير ان العلاقة أعلاه (2.2) لا يمكن ان تشرح العلاقة بين المتغيرين بشكل دقـــيق، فهـــناك أسباب مهمة تجعل هذه المعادلة غير معبرة عن العلاقة بين X و Y تعبـــيراً كاملاً فقد يكون هناك انحراف بين العلاقة الحقيقية والمعادلة الإحصائية التي تمـــثلها نتيجة أخطاء في القياسات أو في اختيار المتغير المستقل، مما يتطلب إضافة متغـــير جديـــد يسمى بالحد العشوائي، Random Variable ويرمز له عادةً بالرمز (U) ودوره امتصـــاص العوامل غير القابلة للقياس، وكذلك أخطاء القياس، عليه فان العلاقة من الصيغة (2.2) يجب ان تعدل لكي تضم حد الخطأ العشوائي حيث يصبح:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \qquad \ldots(3.2)$$

## 2.2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي:

1- ان المتغير العشوائي $(U_i)$ هو متغير تعتمد قيمته في أية فترة زمنية على عامل الصـــدفة، فقد تكون اكبر أو اصغر أو مساوية إلى الصفر، إلا أنها في المتوسط تساوي صفر، أي $E(U_i)=0$، ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \qquad ...(4.2)$$

$$U_i = Y_i - B_0 - B_1 X_i \qquad ...(5.2)$$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة 5.2:

$$\sum U_i = \sum (Y_i - B_0 - B_1 X_i)$$

$$\sum U_i = \sum Y_i - nB_0 - B_1 \sum X_i \qquad ...(6.2)$$

$$\because B_0 = \overline{Y} - B_1 \overline{X}$$

نعوّض عن $B_0$ بما يساويها في المعادلة (6.2):

$$\sum U_i = \sum Y_i - n(\overline{Y} - B_1 \overline{X}) - B_1 \sum X_i \qquad ...(7.2)$$

$$\because \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} \quad , \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

وبحاصل ضرب الطرفين في الوسطين نحصل:

$$\sum Y_i = n\overline{Y} \quad , \sum X_i = n\overline{X}$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (7.2) تكون:

$$\sum U_i = \sum Y_i - \sum Y_i + B_1 \sum X_i - B_1 \sum X_i$$

$$\sum U_i = 0$$

$$E(U_i) = 0$$

2- ان المتغـــير العشوائي ($U_i$) يتوزع توزيعاً طبيعياً، Normally distributed، حـــول القيمة المتوقعة أو حول الوسط الحسابي المساوي للصفر عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل X أي بشكل جرس.

3- ان تبايـــن، Variance، المتغـــير العشوائي (حد الخطأ)، حول الوسط الحسابي مقدار ثابت عند كل قيمة من قيم X أي:

$$var(U_i) = E[U_i - E(U_i)]^2$$

$$\because E(U_i) = 0$$

$$\therefore var(U_i) = E(U_i)^2 = 6^2$$

وإذا كان تباين الخطأ غير ثابت عندئذٍ تظهر مشكلة تسمى مشكلة عدم تجانس التباين، Heteroscedasticity، والتي سنتناولها بشيء من التفصيل لاحقاً.

الفرضيات الثلاث السابقة يمكن جمعها بشكل مختصر وتمثيلها كالآتي:

$$U_i \sim N(0, \sigma^2)$$

أي بمعـــنى ان الخطـــأ العشوائي، $U_i$، يتوزع، ~، توزيعاً طبيعياً، N، بوسط حسابي مساوي للصفر، 0، وتباين ثابت قيمته $\sigma^2$.

4- أن قـــيم $U_i$ غير مرتبطة بأي من المتغيرات المستقلة، أي انعدام التباين المشترك Covariance بين $U_i$ و $X_i$ أي:

$$Cov(U_i X_i) = E(U_i X_i)$$
$$Cov(U_i X_i) = X_i E(U_i)$$
$$\because E(U_i) = 0$$
$$\therefore Cov(U_i X_i) = 0$$

ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \qquad \ldots(8.2)$$
$$U_i = Y_i - B_0 - B_1 X_i \qquad \ldots(9.2)$$

وبضرب طرفي المعادلة بـــ $\sum X_i$:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - B_0 \sum X_i - B_1 \sum X_i^2$$
$$\because B_0 = \overline{Y} - B_1 \overline{X}$$

وعند تعويض ذلك:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i (\overline{Y} - B_1 \overline{X}) - B_1 \sum X_i^2 \qquad \ldots(10.2)$$

$$\because \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} \quad , \quad \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

وبتعويض ذلك يكون:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i \left(\frac{\sum Y_i}{n} - B_1 \frac{\sum X_i}{n}\right) - B_1 \sum X_i^2$$

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i \left(\frac{\sum Y_i - B_1 \sum X_i}{n}\right) - B_1 \sum X_i^2$$

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i Y_i + B_1 \sum X_i^2 - B_1 \sum X_i^2$$

وبعد الحذف والتبسيط يكون:

$$\sum X_i U_i = 0$$

5- القيم المختلفة للمتغير العشوائي ($U_i$) تكون مستقلة عن بعضها البعض بعبارة أخرى التباين المشترك لـ $U_i$ مع $U_j$ مساوية للصفر، وعليه فان قيمة العنصر العشوائي في أي فترة لا تعتمد على قيمته في فترة أخرى أي:

$$Cov\,(U_i\,U_j) = E(U_i\,U_j) = 0 \qquad (i, j = 1,2,3,...,n,\;\; i \neq j)$$

وإذا حدث وجود ارتباط بينها تظهر مشكلة تسمى مشكلة الارتباط الذاتي، Autocorrelation، وسيتم شرحها لاحقاً.

6- انعدام العلاقة بين المتغيرات المستقلة وفي حالة وجود علاقة قوية بينها تظهر مشكلة تسمى مشكلة الارتباط الخطي المتعدد، Multicollinearity، والتي سيتم تناولها فيما بعد.

## 3.2 طريقة المربعات الصغرى، :The Ordinary Least Squares (OLS)

بالرجوع إلى العلاقة الخطية بين دخل الأسرة X وانفاقها على سلعة معينة Y.

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \qquad ...(11.2)$$

يتبين لنا بان تأثير الدخل في الأنفاق على السلعة موضوع البحث يتحدد من خلال العلاقة المنتظمة ($B_0 + B_1 X_1$)، أما تأثير العوامل الأخرى فانه متجسد في ($U_i$).

وعليه فانه لمعرفة العلاقة الحقيقية بين دخل الأسرة وانفاقها على السلعة في القطر يتطلب احتساب $B_0$ و $B_1$، إلا أن احتساب المعالم المذكورة لا يمكن ان يتم إلا في حالة الحصول على دخل وانفاق جميع الأسر في ذلك القطر وهذا أمر غير ممكن

بسبب صعوبة العملية الإحصائية اللازمة ولتسهيل العمل تسحب عينة من أسر القطر، ومن ثم تقدر قيم المعالم ويتم التقدير بواسطة المعادلة:

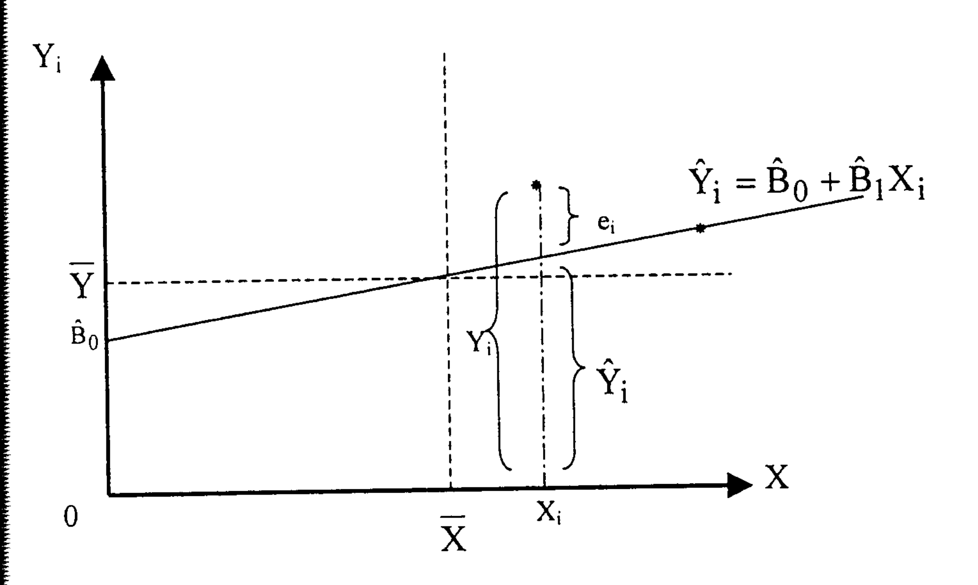
$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i + e_i \qquad ...(12.2)$$

ولتقدير تأثير الدخل بصورة مستقلة في الإنفاق فانه يتم بواسطة المعادلة التالية:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \qquad ...(13.2)$$

تسمى المعادلة (13.2) بمعادلة خط الانحدار، وتشير العلامة (^) إلى كون القيم تقديرية وليست حقيقية وكل نقطة من نقاطه $(\hat{Y}_i)$ تمثل القيمة التقديرية لمتوسط إنفاق جميع العوائل ذات الدخل البالغ X. ويتبين من المعادلتين (12.2) و(13.2) بأن قيم المشاهدات الفعلية $Y_i$ تنحرف عن القيم التقديرية $(\hat{Y}_i)$ بمقدار $e_i$ وكما مبين في الشكل الآتي:

**شكل (1.2)**



من الشكل يتبين ان:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

حيث يمكن للبواقي، $e_i$، ان تكون سالبة أو موجبة حسب موضع نقطة المشاهدة من خط المقدر. ولإيجاد افضل خط مستقيم لعينة مشاهدات $Y$ ، $X$ من بين خطوط لا نهائية العدد تصف المعادلة الخطية، تستخدم طريقة المربعات الصغرى (OLS)، ويتضمن ذلك في محاولة جعل مجموع مربع انحرافات القيم الحقيقية $Y_i$ عن القيم التقديرية $\hat{Y}_i$ اقل ما يمكن، أي جعل مجموع مربعات الأخطاء العشوائية عند نهايتها الصغرى وبما ان طريقة OLS تشترط تصغير القيمة $(\sum e_i^2)$ إلى الحد الأدنى فأنها عبارة عن مشكلة النهايات الصغرى أي:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

حيث ان:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

إذن:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

بما ان معادلة الخط المستقيم الحقيقية غير المعروفة هي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i$$

فان معادلة الخط المستقيم التقديرية تكون:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

بالتعويض عن $\hat{Y}_i$ بما يساويها نحصل:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)^2$$

وكشرط رياضي لتصغير $\sum e_i^2$ تؤخذ المشتقات الجزئية لكل من $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ ومساواة كل منها بالصفر.

وان الشـــرط الجوهري للتصغير هو اخذ التفاضل الجزئي لمجموع المربعات بالنســبة لمعـــاملات، Coefficient، الـــنموذج $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ ومساواة المشتقة الأولى بالصفر.

أي بتطبيق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 2\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)(-1) = 0$$

$$-2\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

بالقسمة على (2-) وفك القوس وترتيب المعادلة نحصل على:

$$\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

$$\sum Y_i - n\hat{B}_0 - \hat{B}_1 \sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \qquad \ldots(14.2)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)(-X_i) = 0$$

$$-2\sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

بالقسمة على (2-) نحصل على:

$$\sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

$$\sum X_i Y_i - \hat{B}_0 \sum X_i - \hat{B}_1 \sum X_i^2 = 0$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \qquad \ldots(15.2)$$

تســـمى المعادلتين (14.2) و(15.2) بالمعادلتين الطبيعيتين (الآنيتين) حيث (n) عدد المشـــاهدات، $X_i$ و$Y_i$ هي معلومة دائماً باعتبارهما قيم المشاهدات الحقيقية وبمجرد

تعويضـــهمـــا في المعادلتين (14.2) و(15.2) وبحلهما آنياً نحصل على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ اللتان تمثلان مقدرتان للمعلمتين الحقيقيتين $B_0$ و $B_1$.

### 1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:

ولتقدير معاملات النموذج $B_0$ و $B_1$ نستعين بعدة طرق منها:

1- طريقة الحذف والتعويض.

2- طريقة المحددات.

3- طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.

4- طريقة المصفوفات.

وسنبين هذه الطرق من خلال المثال الآتي، من دون تكرارها هنا وهناك.

**مــثال 1.2:** الجدول الآتي يمثل عدد سنوات الخدمة $(X_i)$ ومعدل الأجر السنوي $(Y_i)$ بآلاف الدنانير لعينة تمثل (8) موظفين في أحد الدوائر.

| $X_i$ | $Y_i$ | $X_i Y_i$ | $X_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 25.6 | 102.4 | 16 |
| 8 | 32.7 | 261.6 | 64 |
| 12 | 45.4 | 544.8 | 144 |
| 16 | 53.9 | 862.4 | 256 |
| 20 | 59.0 | 1180 | 400 |
| 24 | 62.6 | 1502.4 | 576 |
| 28 | 65.0 | 1820 | 784 |
| 32 | 65.5 | 2105.6 | 1024 |
| $\sum X_i = 144$ <br> $\overline{X} = 18$ | $\sum Y_i = 410$ <br> $\overline{Y} = 51.25$ | $\sum X_i Y_i = 8379.2$ | $4\sum X_i^2 = 326$ |

**المطلوب:** تقدير خط الانحدار بواسطة المعادلتين الطبيعيتين أعلاه.

### 1.1.3.2 طريقة الحذف والتعويض، Substitution Method:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \quad ...(16.2)$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \quad ...(17.2)$$

وبتعويض القيم من الجدول في المعادلتين 16.2، 17.2 نحصل على:

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144\hat{B}_1 \quad ...(18.2)$$

$$8379.2 = 144\hat{B}_0 + 3264\hat{B}_1 \quad ...(19.2)$$

وبضرب المعادلة (18.2) في 18 نحصل:

$$7380 = 144\hat{B}_0 + 2592\hat{B}_1 \quad ...(20.2)$$

$$8379.2 = 144\hat{B}_0 + 3264\hat{B}_1 \quad ...(21.2)$$

وبطرح معادلة (20.2) من (21.2) نحصل:

$$999.2 = 672\hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{999.2}{672} = 1.486904762$$

للحصـــول على قيمة $\hat{B}_0$ نعوض عن قيمة $\hat{B}_1$ في أحد المعادلتين الرئيستين ولتكن معادلة (18.2).

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144\hat{B}_1$$

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144(1.486904762)$$
$$410 = 8\hat{B}_0 + 214.1142857$$
$$410 - 214.1142857 = 8\hat{B}_0$$
$$195.8857143 = 8\hat{B}_0$$

$$\hat{B}_0 = \frac{195.8857143}{8} = 24.48571429$$

وعليه فان المعادلة المقدرة ، Estimated، للعلاقة بين عدد سنوات الخدمة $X_i$ ومعدل الأجر السنوي $Y_i$ للعينة المعنية تكون:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$
$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762 X_i$$

تشـــير المعادلـــة التقديرية إلى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع $Y_i$ الذي يمثل معـــدل الأجـــر السنوي للموظف والمتغير المستقل $X_i$ الذي يمثل عدد سنوات الخدمة فـــبزيـــــادة خدمتـــــه الوظيفية بمقدار سنة واحدة يزداد معدل اجره السنوي بمقدار 1486 دينار.

### 2.1.3.2 طريقة المحددات، Determinates Method:

ويمكن الحصول على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ باعتماد المحددات (قاعدة كرايمر) وذلك بإعادة كتابة المعادلتين الطبيعيتين (16.2) و(17.2) في صيغة مصفوفة وعلى النحو الآتي:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

ولتقدير $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ ينبغي تكوين المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = (n)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i)$$

$$|A_0| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = (\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = (n)(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|A_1|}{|D|} = \frac{n(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|A_0|}{|D|} = \frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$$

or

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}$$

بالـــرجوع إلى بيانات المثال (1.2) وباعتماد المحددات نحصل على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{vmatrix}$$

$$|D| = (8)(3264) - (144)(144)$$

$$|D| = 26112 - 20736$$

$$|D| = 5376$$

$$|A_o| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 410 & 144 \\ 8379.2 & 3264 \end{vmatrix}$$

$$|A_o| = (410)(3264) - (144)(9379.2)$$

$$|A_o| = 1338240 - 1206604.8$$

$$|A_o| = 131635.2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 410 \\ 144 & 8379.2 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = (8)(8379.2) - (410)(144)$$

$$|A_1| = 67033.6 - 59040$$

$$|A_1| = 7993.6$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|A_0|}{|D|} = \frac{131635.2}{5376} = 24.48571429$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|A_1|}{|D|} = \frac{7993.6}{5376} = 1.486904762$$

وبذلك تكون المعادلة التقديرية:

$$\therefore \hat{Y}_i = 24.4857 + 1.486 X_i$$

**3.1.3.2 طريقة التقدير حول نقطة المتوسط:**

كما يمكن تقدير $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ بواسطة انحرافات المتغيرين $Y_i$ و $X_i$ عن وسطهما الحسابي $\overline{Y}$ و $\overline{X}$ باستخدام فكرة البواقي $e_i$ فبقسمة المعادلة الطبيعية رقم (1) على n نحصل:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \qquad \ldots(22.2)$$

$$\frac{\sum Y_i}{n} = \hat{B}_0 \frac{n}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X} \qquad \ldots(23.2)$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X} \qquad \ldots(24.2)$$

ولإيجاد $\hat{B}_1$ نعود إلى معادلة الخط المستقيم التقديرية حيث:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \qquad \ldots(25.2)$$

وبطرح المعادلة رقم (23.2) من (25.2) نحصل على:

$$\hat{Y}_i - \overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \overline{X} \quad \ldots(26.2)$$

$$\hat{Y}_i - \overline{Y} = \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_1 \overline{X}$$
$$\hat{Y}_i - \overline{Y} = \hat{B}_1 (X_i - \overline{X})$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_i \quad \ldots(27.2)$$

$$\because e_i = y_i - \hat{y}_i$$
$$e_i = y_i - \hat{B}_1 x_i \quad \ldots(28.2)$$

وبإدخال $\sum$ وتربيع الطرفين:

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{B}_1 x_i)^2 \quad \ldots(29.2)$$

بإيجاد المشتقة الجزئية لـــ $\hat{B}_1$ ومساواتها بالصفر:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2\sum (y_i - \hat{B}_1 x_i)(-x_i) = 0 \quad \ldots(30.2)$$
$$-2\sum x_i (y_i - \hat{B}_1 x_i) = 0$$

وبالقسمة على (2-):

$$\sum x_i (y_i - \hat{B}_1 x_i) = 0$$
$$\sum x_i y_i - \hat{B}_1 \sum x_i^2 = 0$$

$$\sum x_i y_i = \hat{B}_1 \sum x_i^2$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad ...(31.2)$$

حيث ان:

$\sum x_i y_i$ تمثل مجموع حاصل ضرب انحرافات القيم عن الوسط الحسابي للمتغيرين $X_i$ و $Y_i$، وان $\sum x_i^2$ تمثل مجموع مربع الانحرافات لقيم المتغير $X_i$ عن وسطه الحسابي. وعليه فان المعادلتين (24.2) و(31.2) هي المعادلات الأساسية التي تستخدم في أيجاد قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ بموجب طريقة الانحرافات.

وبالرجوع إلى بيانات الجدول (1.2) والتعبير عنها بصيغة انحرافات يمكن الحصول على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ كما يأتي:

| $X_i$ | $Y_i$ | $x_i$ | $Y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 25.6 | -14 | −25.65 | 359.1 | 196 |
| 8 | 32.7 | −10 | −18.55 | 185.5 | 100 |
| 12 | 45.4 | −6 | −5.85 | 35.1 | 36 |
| 16 | 53.9 | −2 | 2.65 | −5.3 | 4 |
| 20 | 59.0 | 2 | 7.75 | 15.5 | 4 |
| 24 | 62.6 | 6 | 11.35 | 68.1 | 36 |
| 28 | 65.0 | 10 | 13.75 | 137.5 | 100 |
| 32 | 68.5 | 14 | 14.55 | 203.7 | 196 |
| $\sum X_i = 144$<br>$\overline{X} = 18$ | $\sum Y_i = 410$<br>$\overline{Y} = 51.25$ | $\sum x_i = 0$<br>$x_i = X - \overline{X}$ | $\sum y_i = 0$<br>$y_i = Y - \overline{Y}$ | $\sum x_i y_i =$<br>999.2 | $\sum x_i^2 = 672$ |

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{999.2}{672} = 1.486904762$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}$$
$$\hat{B}_0 = 51.25 - (1.486904762)(18)$$
$$\hat{B}_0 = 51.25 - 26.76428572$$
$$\hat{B}_0 = 24.48571428$$
$$\therefore \hat{Y}_i = 24.485 + 1.486 X_i$$

**4.1.3.2 طريقة المصفوفات، Matrices Method:**

إضافة إلى الطرق السابقة فأنه يمكن تقدير قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ باعتماد صيغة المصفوفات حيث يمكن كتابة المعادلات الطبيعية على شكل مصفوفات، Matrices ومتجهات، Vectors، وكما يلي:

نفترض ان هناك علاقة تحتوي على i من المشاهدات من $1 \leftarrow n$ وان هناك عدد من المتغيرات من $1 \leftarrow K$.

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \qquad \ldots(32.2)$$

$$\begin{array}{l}
Y_1 = B_0 + B_1 X_{11} + B_2 X_{12} + \cdots\cdots + B_k X_{1k} + U_1 \\
Y_2 = B_0 + B_1 X_{21} + B_2 X_{22} + \cdots\cdots + B_k X_{2k} + U_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Y_n = B_0 + B_1 X_{n1} + B_2 X_{n2} + \cdots\cdots + B_k X_{nk} + U_n
\end{array}$$

يمكن تمثيل هذه المعادلات بصيغة رمز المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

$$Y = XB + U \qquad \ldots(33.2)$$

حيث ان:

Y: متجه عمودي أبعاده (nx1) يحتوي على n مشاهدة للمتغير التابع Y.

X: مصفوفة أبعادها (n x k+1) تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة X. وعمودها الأول يحتوي على قيم الواحد صحيح لأخذ الثابت بنظر الاعتبار.

B: متجه عمودي أبعاده (k+1x1) تحتوي المعالم المجهولة.

U: متجه عمودي أبعاده (n x 1) يحتوي الخطأ العشوائي.

وللحصـــول على تقديرات المربعات الصغرى العادية لمتجه المعلمات يمكن كتابة المعادلة المقدرة التي يراد الحصول عليها وبصيغة المصفوفات كما يلي:

$$Y = \hat{Y} + e$$

$$Y = X\hat{B} + e$$

$$\therefore e = Y - X\hat{B} \qquad \ldots(34.2)$$

وباستخدام المبدلة لـــ e .

$$e'e = (Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$$

$$e'e = (Y' - \hat{B}'X')(Y - X\hat{B})$$
$$e'e = Y'Y - \hat{B}'X'Y - Y'X\hat{B} + \hat{B}'X'X\hat{B} \qquad ...(35.2)$$

بما ان الحد الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة، كما وان كل حد يمثل مبدلة للآخر فأن:

$$[\hat{B}'X'Y = (\hat{B}'X'Y)' = \hat{B}XY']$$
$$\therefore e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B} \qquad ...(36.2)$$

ولما كانت $\hat{B}' = (\hat{B}')' = \hat{B}$

وبأخذ المشتقة الجزئية لـــ $\hat{B}'$ ومساواتها بالصفر:

$$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{B}'} = -2X'Y + 2X'X\hat{B} = 0$$

$$2X'X\hat{B} = 2X'Y$$

وبقسمة طرفي المعادلة على (2) نحصل:

$$X'X\hat{B} = X'Y$$

وبضرب طرفي المعادلة بالمعكوس $(X'X)^{-1}$ نحصل:

$$(X'X)^{-1}X'X\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

وبما ان حاصل ضرب المعكوس $(X'X)^{-1}$ في المصفوفة $X'X$ يساوي مصفوفة الوحدة، $I$ ، إذن المعادلة أعلاه تصبح:

$$\therefore \hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad ...(37.2)$$

حيث ان:

$\hat{B}$ : تمثل معاملات الانحدار المطلوب تقديرها.

$(X'X)^{-1}$ : تمثل معكوس المصفوفة $(X'X)$.

$X'Y$ : تمثل المتجه.

وبالـــرجوع إلى البيانات الواردة في الجدول (1.2) وباعتماد صيغة المصفوفات يمكن الحصول على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ وكالآتي:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \\ 1 & 12 \\ 1 & 16 \\ 1 & 20 \\ 1 & 24 \\ 1 & 28 \\ 1 & 32 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \text{adj} X'X$$

$$|X'X| = \begin{bmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{bmatrix} = (8)(3264) - (144)(144)$$

$$|X'X| = 26112 - 20736$$

$$|X'X| = 5376$$

$$\operatorname{adj} X'X = \begin{bmatrix} 3264 & -144 \\ -144 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{5376}\begin{bmatrix} 3264 & -144 \\ -144 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.607142857 & -0.026785714 \\ -0.026785714 & 0.001488095 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25.6 \\ 32.7 \\ 45.4 \\ 53.9 \\ 59.0 \\ 62.6 \\ 65.0 \\ 65.8 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 410 \\ 8379.2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.607142857 & -0.026785714 \\ -0.026785714 & 0.001488095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 410 \\ 8379.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 248.9285714 \quad + (-224.4428547) \\ -10.98214274 + 12.46904562 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.48571 \\ 1.48690 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 24.485 + 1.486 X_i$$

يتضـــح ممـــا سبق بأن النتائج التي تم التوصل إليها في المعادلة التقديرية هي نفسها تماماً بالطرق الأربعة الآنفة الذكر.

## 2.3.2 الخواص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى:

في كل تقدير يتم الحصول عليه، هناك خصائص عدة مرغوب فيها لذلك التقدير، ومن هذه الخصائص خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز، Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)، فكل مقدر $(\hat{B})$ يمكن التعبير عنه كدالة خطية بالنسبة لمشاهدات المتغير التابع (Y)، اي ان:

$$\hat{B} = K_1 Y_1 + K_2 Y_2 + \ldots\ldots + K_n Y_n$$

حيث ان:

$K_i$، $(i=1,2,\ldots,n)$ عبارة عن أوزان أو قيم ثابتة. ومن بين جميع المقدرات الخطية نبحث عن المقدرات غير المتحيزة، ونقصد بعدم التحيز هو ان يكون الفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر وقيمة المعلمة الحقيقية يساوي صفر، أي:

$$E(\hat{B}) - B = 0$$

وأفضل مقدر هو ذلك المقدر الذي يكون تباينه حول الوسط الحسابي اقل مايمكن فإذا كان $\overset{*}{B}$ ، $\hat{B}$ مقدرات خطية غير متحيزة فان $\hat{B}$ أفضل مقدر اذا تحققت العلاقة الآتية:

$$\mathrm{var}(\hat{B}) < \mathrm{var}(\overset{*}{B})$$

وسوف نتناول أدناه هذه الخصائص بشيء من التفصيل:

### 1.2.3.2 الخاصية الخطية، Linearity Property:

مقدرات المربعات الصغرى خطية في المتغير التابع حيث نلاحظ ان تلك المقدرات يمكن وصفها في صورة دالة او ترتيب خطي من قيم المتغير Y، أي:

$$\hat{B}_1 = K_1Y_1 + K_2Y_2 + ...... + K_nY_n$$

$$\therefore \hat{B}_1 = \sum_{i=1}^{n} K_iY_i$$

$$\because \hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

وان:

للمشاهدة الواحدة

$$y_i = Y_i - \overline{Y}$$

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{\sum x_i (Y_i - \overline{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} - \frac{\overline{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\because \sum x_i = \sum (X_i - \overline{X}) = 0$$

$$\therefore \frac{\overline{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2} = 0$$

لذلك تكون:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum \left[ \frac{x_i}{\sum x_i^2} Y_i \right]$$

ولما كانت قيم $X$ ثابتة، نجد ان $\frac{x_i}{\sum x_i^2}$ هي مقادير ثابتة، ويمكن ان نرمز لها بالرمز $K_i$ وهي ثابتة في كل العينات، أي:

$$K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

$\hat{B}_1$ مجموع مرجح لقيم المتغير التابع، $Y_i$

$$\therefore \hat{B}_1 = \sum K_i Y_i$$

$$\therefore \hat{B}_1 = F(Y_i)$$

إذاً $\hat{B}_1$ هو مقدر خطي.

**خصائص الأوزان، Weighted Properties:**

وبمــا ان الأوزان تعــتمد علــى قــيم X الثابتة فقط فأنها تعتبر ثابتة أيضاً، وتخضع $K_i$ للشروط الآتية:

1- مجموع الأوزان يساوي صفر، اي ان:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = 0$$

$$\because K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

إذن:

$$\sum K_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\because \sum x_i = \sum (X_i - \overline{X}) = 0$$

وبالتعويض، فأن:

$$\therefore \sum K_i = \frac{0}{\sum x_i^2} = 0$$

2- مجمـــوع حاصـــل الضـــرب للأوزان $(K_i)$ في قيم المتغير المستقل $(X_i)$ او في انحرافاتها عن متوسطها الحسابي $(x_i)$ يساوي الواحد صحيح، أي:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i X_i = \sum_{i=1}^{n} K_i x_i = 1$$

$$\sum K_i x_i = \sum K_i (X_i - \bar{X})$$

$$= \sum K_i X_i - \bar{X} \sum K_i$$

وقد بينّا سابقاً ان:

$$\because \sum K_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i x_i = \sum K_i X_i$$

وبما ان:

$$\because K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

إذن:

$$\sum K_i x_i = \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} x_i$$

لذلك تكون:

$$\sum K_i x_i = \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = 1$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} K_i x_i = \sum_{i=1}^{n} K_i X_i = 1$$

3- مجمـــوع مربعات الأوزان، $\sum K_i^2$، يساوي معكوس مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل، $\frac{1}{\sum x_i^2}$، أي ان:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

وبما ان:

$$K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} = \frac{(X_i - \overline{X})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

وعند تربيع الطرفين، ثم جمعها، يكون:

$$\sum K_i^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{[\sum (X_i - \overline{X})^2]^2}$$

وبعد الاختصار والترتيب:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

وبطريقة مماثلة يمكن البرهنة بان $\hat{B}_0$ دالة خطية من قيم المتغير $Y$ .

$$\hat{B}_0 = W_1 Y_1 + W_2 Y_2 + \dots\dots + W_n Y_n$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \sum_{i=1}^{n} W_i Y_i$$

$$\because \hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}$$

وان:

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}, \quad \hat{B}_1 = \sum K_i Y_i$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \frac{\sum Y_i}{n} - \overline{X} \sum K_i Y_i$$

ومن خلال إعادة الترتيب، نحصل:

$$\hat{B}_0 = \sum \left[ \frac{1}{n} - \overline{X} K_i \right] Y_i$$

ولما كانت $K_i , \overline{X}$ مقادير ثابتة، نرمز لها بالرمز $W_i$، أي ان:

$$W_i = \left[ \frac{1}{n} - \overline{X} K_i \right]$$

وبتعويض ذلك في المعادلة أعلاه، نجد ان $\hat{B}_0$ تعتمد على قيم $Y_i$ فقط، بعبارة أخرى:

$$\hat{B}_0 = \sum W_i Y_i$$

$$\therefore \hat{B}_0 = F(Y_i)$$

إذن $\hat{B}_0$ هو مقدر خطي.

**2.2.3.2 خاصية عدم التحيز، Unbiasedness Property:**

تقصد بعدم التحيز هو ان يكون الفرق بين القيمة المتوقفة للمقدر $E(\hat{B})$ وقيمة المعلمة الحقيقية للمجتمع الإحصائي (B)، يساوي صفر، أي:

$$E(\hat{B}) - B = 0$$

بعبارة أخرى يعتبر المقدر غير متحيز إذا كان وسطها يساوي القيمة الحقيقية للمعلمة:

$$E(\hat{B}) = B$$

ولاثبات خاصية عدم التحيز بالنسبة $\hat{B}_1$ نتبع ما يلي:

من خاصية الخطية

$$\hat{B}_1 = \sum K_i Y_i$$

وباستحضار المعادلة:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

وبتعويض ذلك في أعلاه:

$$\hat{B}_1 = \sum K_i (B_0 + B_1 X_i + U_i)$$

وبفتح القوس نحصل:

$$\hat{B}_1 = B_0 \sum K_i + B_1 \sum K_i X_i + \sum K_i U_i \qquad ...(38.2)$$

وباستخدام شروط الأوزان فأن:

$$\sum K_i = 0$$

$$B_0 \sum K_i = 0$$

$$\sum K_i X_i = 1$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (38.2)، نحصل:

$$\therefore \hat{B}_1 = B_1 + \sum K_i U_i \qquad ...(39.2)$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_1) = B_1 + \sum K_i E(U_i)$$

من فرضيات الخطأ العشوائي

$$\because E(U_i) = 0$$

$$\because EK_i E(U_i) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}_1) = B_1 \qquad ...(40.2)$$

ويعني ذلك ان $\hat{B}_1$ هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية، B.

**إثبات خاصية عدم التحيز لــ$\hat{B}_0$:**

وبـــنفس المنهجـــية يمكن البرهنة بأن $\hat{B}_0$ تعتبر مقدرة غير متحيزة للمعلمة الحقيقية $B_0$.

من الخاصية الخطية يتبين لنا:

$$\hat{B}_0 = \sum W_i Y_i$$

$$W_i = \left[\frac{1}{n} - \bar{X}K_i\right]$$

وان:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

وعند التعويض نحصل:

$$\therefore \hat{B}_0 = \sum\left[\frac{1}{n} - \bar{X}K_i\right]\left[B_0 + B_1 X_i + U_i\right]$$

وعند فك الأقواس والتعويض، نحصل:

$$\hat{B}_0 = B_0 - B_0\bar{X}\sum K_i + B_1\bar{X} - \bar{X}B_1\sum K_i X_i + \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)U_i \quad ....(41.2)$$

وباستخدام شروط الأوزان:

$$\because \sum K_i = 0$$

$$\therefore B_0\bar{X}\sum K_i = 0$$

$$\because \sum K_i X_i = 1$$

$$\therefore \hat{B}_0 = B_0 + \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)U_i \quad ...(42.2)$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_0) = B_0 + \sum(\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)E(U_i)$$

$$\because E(U_i) = 0$$

$$\therefore \sum(\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)E(U_i) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}_0) = B_0 \qquad ...(43.2)$$

ويعني ذلك ان $\hat{B}_o$ هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية، $B_0$.

**3.2.3.2 خاصية افضل مقدر (اقل تباين)، Best Minimum Variance:**

ان مفهـــوم تبايـــن المعالم يُحدد بواسطة الانحراف بين المعالم المقدرة لـــ $\hat{B}$ وقيمتها المتوقعة $E(\hat{B})$.

فبالنسبة لـــ $\hat{B}_1$ فأن:

$$var(\hat{B}_1) = E[\hat{B}_1 - E(\hat{B}_1)]^2 \qquad ...(44.2)$$

من خاصية عدم التحيز $\because E(\hat{B}_1) = B_1$

$$var(\hat{B}_1) = E[\hat{B}_1 - B_1]^2 \qquad ...(45.2)$$

بالرجـــــوع إلى المعادلة (39.2) من خاصية عدم التحيز والخاصة بـــ$\hat{B}_1$ نجد ان:

$$\hat{B}_1 = B_1 + \sum K_i U_i$$

$$\hat{B}_1 - B_1 = \sum K_i U_i$$

بتربيع الطرفين:

$$(\hat{B}_1 - B_1)^2 = (\Sigma K_i U_i)^2$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_1 - B_1)^2 = E(\Sigma K_i U_i)^2$$

$$\text{var}(\hat{B}_1) = E[\Sigma K_i U_i]^2 \qquad \ldots(46.2)$$

وبفك القوس، نحصل:

$$\text{var}(\hat{B}_1) = \Sigma K_i^2 E(U_i)^2 + 2\sum_{i<j} \Sigma K_i K_j E(U_i U_j)$$

ومن فرضيات الخطأ العشوائي ان :

$$E(U_i)^2 = \sigma^2$$

وان:

$$E(U_i U_j) = 0 \qquad \text{For all } i \neq j .$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_1) = \Sigma K_i^2 \ \sigma^2 \qquad \ldots(47.2)$$

$$\because K_i = \frac{x_i}{\Sigma x_i^2}$$

$$\Sigma K_i^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{(\Sigma x_i^2)^2} = \frac{1}{\Sigma x_i^2}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_1) = \frac{1}{\Sigma x_i^2} . \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\Sigma x_i^2}$$

وبالأسلوب نفسه يمكن تحديد التباين لـــ $\hat{B}_0$ على النحو الآتي:

$$var(\hat{B}_0) = E[\hat{B}_0 - E(\hat{B}_0)]^2 \quad ...(48.2)$$

من خاصية عدم التحيز:

$$\because E(\hat{B}_0) = B_0$$

$$var(\hat{B}_0) = E[\hat{B}_0 - B_0]^2$$

وبالـــرجــــوع إلى المعادلة (42.2) من خاصية عدم التحيز والخاصة بــ $\hat{B}_0$ نجد ان:

$$\hat{B}_0 = B_0 + \Sigma(\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)U_i$$

$$\hat{B}_0 - B_0 = \Sigma(\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)U_i$$

$$var(\hat{B}_0) = E\left[\Sigma(\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)U_i\right]^2$$

$$var(\hat{B}_0) = \Sigma(\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)^2 \; E(U_i)^2$$

$$\because E(U_i)^2 = \sigma^2$$

$$\therefore var(\hat{B}_0) = \sigma^2\left[\Sigma(\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)^2\right]$$

وبفك القوس نحصل:

$$var(\hat{B}_0) = \sigma^2 (\frac{1}{n} - \frac{2\overline{X}^2}{n} \sum K_i + \overline{X}^2 \sum K_i^2)$$

وباستخدام شروط الأوزان:

$$\sum K_i = 0$$

$$\therefore \frac{2\overline{X}^2}{n} \sum K_i = 0$$

وان:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$\therefore var(\hat{B}_0) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2})$$

ولاثـــبات ان مقـــدرات (OLS) هي افضل مقدرات خطية غير متحيزة أي أنها تتسم بالكفـــاءة ، ونتيجة لنسبية معيار الأفضلية فأننا نقوم بتعريف مقدرة أخرى ولتكن $\overset{*}{B}_1$ تخـــتلف عن مقدرة OLS، $\hat{B}_1$ ، حيث سيتضح لاحقاً ان تباين تلك المقدرة $\overset{*}{B}_1$ لابد وان يفـــوق تبايـــن مقـــدرة OLS، $\hat{B}_1$ ، وبالتالي نفضل المقدرة الأخيرة $\hat{B}_1$ صاحبة التباين الأقل.

$$\overset{*}{B}_1 = \sum C_i Y_i \qquad ...(49.2)$$

$$C_i = K_i + d_i$$

وان $d_i \neq 0$ ، حيث $d_i$ كميات ثابتة.

$$\because Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

$$\overset{*}{B}_1 = \sum C_i (B_0 + B_1 X_i + U_i) \qquad \ldots(50.2)$$

$$\overset{*}{B}_1 = B_0 \sum C_i + B_1 \sum C_i X_i + \sum C_i U_i$$

ولكـــي تكـــون $\overset{*}{B}_1$ غـــير متحيزة أي $E(\overset{*}{B}_1) = B_1$ يجب ان تتصف $C_i$ بالصفات الآتية:

$$a: \quad \sum C_i = 0$$

أو

$$\sum K_i + \sum d_i = 0$$

معروفة مسبقاً $\because \sum K_i = 0$

$$\sum d_i = 0$$

أي إن: $\therefore \sum C_i = 0$

$$b: \quad \sum C_i X_i = 1$$

او

$$\because \sum K_i X_i + \sum d_i X_i = 1$$

معروفة مسبقاً

$$\because \sum K_i X_i = 1$$

أي ان:

$$\sum d_i X_i = 0$$

$$\therefore \sum C X_i = 1 + 0 + 1$$

$$\overset{*}{B}_1 = B_1 + \sum C_i U_i \qquad \ldots(51.2)$$

$$E(\overset{*}{B}) = B_1 + \sum C_i E(U_i)$$

$$\because E(U_i) = 0$$

$$\therefore \sum C_i E(U_i) = 0$$

$$E(\overset{*}{B}_1) = B_1 \qquad ...(52.2)$$

هـنا المقـدر $\overset{*}{B}_1$ غير متحيز ولتحديد تباين هذه المقدرة الخطية غير المتحيزة فـ
نعوض في قانون var.

$$\text{var } \overset{*}{B}_1 = E\left[\overset{*}{B}_1 - E(\overset{*}{B}_1)\right]^2$$

من المعادلة رقم (52.2)

$$\because E(\overset{*}{B}_1) = B_1$$

$$\text{var } \overset{*}{B}_1 = E\left[\overset{*}{B}_1 - B_1\right]^2$$

وباستخدام المعادلة رقم (51.2)

$$\overset{*}{B}_1 = B_1 + \sum C_i U_i$$

$$\overset{*}{B}_1 - B_1 = \sum C_i U_i$$

$$\text{var } (\overset{*}{B}_1) = E\left[\sum C_i U_i\right]^2 \qquad ...(53.2)$$

وبفك القوس، نحصل على:

$$var(\overset{*}{B}_1) = \sum C_i^2 E(U_i)^2 + 2\sum_{i>j} C_i C_j E(U_i U_j)$$

ومن فرضيات الخطأ العشوائي:

$$E(U_i)^2 = \sigma^2$$

وان

$$E(U_i U_j) = 0$$

$$\therefore var(\overset{*}{B}_1) = \sum C_i^2 \sigma^2 \qquad ...(54.2)$$

ولما كانت

$$C_i = K_i + d_i$$

$$var(\overset{*}{B}_1) = \sum (K_i + \sum d_i)^2 \sigma^2$$

$$var(\overset{*}{B}_1) = \sigma^2 [\sum K_i^2 + \sum d_i^2 + 2\sum K_i d_i]$$

$$var(\overset{*}{B}_1) = \sigma^2 \sum K_i^2 + \sigma^2 \sum d_i^2 + 2\sigma^2 \sum K_i d_i$$

$$\because \sum K_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i d_i = 0$$

$$var(\overset{*}{B}_1) = \sigma^2 \sum K_i^2 + \sigma^2 \sum d_i^2 \qquad ...(55.2)$$

ولما كانت:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$\text{var}(\overset{*}{B}_1) = \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2} + \sigma^2 \sum d_i^2 \qquad \ldots(56.2)$$

$$\because \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2} = \text{var}(\hat{B}_1)$$

$$\therefore \text{var}(\overset{*}{B}_1) = \text{var}(\hat{B}_1) + \sigma^2 \sum d_i^2 \qquad \ldots(57.2)$$

وحيث ان: $\sum d_i^2 > 0$

عليه فأن:

$$\text{var}(\overset{*}{B}_1) > \text{var}(\hat{B}_1)$$

ومـــن ثم فأننا نرى ان مقدرة OLS الخاصة بالمعلمة $\hat{B}_1$ تتميز بأصغر تباين من بين المقدرات الخطية غير المتحيزة للمعلمة $\overset{*}{B}_1$.

## 4.2 تقدير تباين حد الخطأ العشوائي:

يستعمل تباين $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ في أجراء الاختبارات المعنوية الخاصة بتلك المقدرات، غير ان تبايـــن المقدرات يحتوي على معلمة مجهولة هي $(\sigma^2)$ تباين حد الخطأ العشوائي الذي يرمز له بالرمز $(S_e^2)$ و يمكن اشتقاقه كالآتي:

بما ان المعادلة التقديرية تأخذ الصيغة الآتية:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \qquad ...(58.2)$$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة:

$$\sum \hat{Y}_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

وبالقسمة على $n$ :

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \frac{n}{n}\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{\hat{Y}} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X} \qquad ...(59.2)$$

و بطرح المعادلة (59.2) من المعادلة (58.2) نحصل:

$$\hat{Y}_i - \overline{\hat{Y}} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \overline{X}$$

و بعد الاختصار، نحصل:

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_1 \overline{X}$$

أذن :

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 (X_i - \overline{X})$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_i \qquad ...(60.2)$$

$$\because e_i = y_i - \hat{y}_i$$

وبالتعويض من المعادلة (60.2):

$$\therefore e_i = y_i - \hat{B}_1 x_i$$

و بتربيع طرفي هذه المعادلة:

$$e_i^2 = (y_i - \hat{B}_1 x_i)^2$$

و عند فك الأقواس، نحصل:

$$e_i^2 = y_i^2 + \hat{B}_1^2 x_i^2 - 2\hat{B}_1 x_i y_i$$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 + \hat{B}_1^2 \sum x_i^2 - 2\hat{B}_1 \sum x_i y_i \qquad ...(61.2)$$

$$\because \hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

وان حاصل ضرب الطرفين في الوسطين لذلك سيكون:

$$\hat{B}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

وبالتعويض في المعادلة (61.2) بما يساويها:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 + \hat{B}_1 \sum x_i y_i - 2\hat{B}_1 \sum x_i y_i$$

وبعد الاختصار نحصل:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i \qquad ...(62.2)$$

وقد جرى تعريف $\sigma^2$ على أنها:

$$\sigma^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

وبالتعويض عن البسط من المعادلة 62.2 ، نحصل:

$$\sigma^2 = \frac{\sum y_i^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i}{n-2} \qquad ...(63.2)$$

وهـذا يعنـي ان تباين أخطاء العينة تمثل النسبة بين مجموع مربعات انحرافات القيم المشاهدة عن خط انحدار العينة إلى درجة الحرية للخطأ.

وإذا رمزنا إلى التقدير الخطي غير المتحيز لتباين الخطأ بالرمز $(S_e^2)$، فأن:

$$S_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

ذلك يعني أن $S_e^2$ افضل مقدر غير متحيز لتباين المتغير العشوائي أو حد الخطأ، $u_i$.

## أسئلة الفصـــــل الثاني

**السـؤال 1.2** ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

**السؤال 2.2:** لنموذج الانحدار الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1X_t + U_t$$

$$U_t \sim N(0, \sigma^2 U) \quad , \quad E(U_t, U_t) = 0$$

علماً بأن العمليات الحسابية الخاصة بمشاهدات المتغير $(Y_t)$ و$(X_t)$ كانت كالآتي:

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t = 30 \quad , \quad \sum_{t=1}^{5} Y_t^2 = 190 \quad , \quad \sum_{t=1}^{5} Y_t = 12 \quad ,$$

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t^2 = 34 \quad , \quad \sum_{t=1}^{5} X_t Y_t = 74$$

**المطلوب:** تقدير كل من $B_0$ و $B_1$.

**السـؤال 3.2:** ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

**السؤال 4.2:** ما هو المتغير العشوائي، ولماذا يستخدم في النموذج الاقتصادي.

# الفصل الثالث: اختبار الفرضيات، Hypotheses Testing

1.3 المقدمة.

2.3 اختبار قيمة t، t-Value Test.

3.3 معامل التحديد، R2، Determinant Coefficient.

4.3 اختبار إحصائية F، F-Statistics.

5.3 معامل الارتباط البسيط، r، Simple Correlation Coefficient

6.3 حدود الثقة لمعاملات الانحدار.

7.3 التنبؤ.

8.3 الأسئلة والتمارين.



# الفصل الثالث: اختبار الفرضيات، Hypothesis Testing

## 1.3 المقدمـــــة:

تناولـــنا فـــي الفصـــل السابق، دراسة العلاقة بين متغيرين (الانحدار الخطي البســيط)، وقد بينا صيغ اشتقاق معلمات النموذج بطريقة OLS، وطرق تقدير هذه المعلمـــات. ولكن المنطق يحتم علينا عدم قبول هذا النموذج إلا بعد أجراء تقييم لهذه النتائج من الناحية الاقتصادية والإحصائية. ويتم هذا باستخدام نتائج التقدير في اختبار النظريات أو اتخاذ القرارات أو وضع السياسات.

ســـنتناول فـــي هذا الفصل، تقييم نموذج الانحدار المقدر، ولتحقيق ذلك سيتم اختبار المعنوية الاقتصادية والإحصائية لنتائج تقدير نموذج الانحدار.

**اختبار الفرضيات، Test of hypothesis:**

تعـــرف الفرضية بأنه ادعاء قابل لأن يكون صحيحاً أو غير صحيح، وتثبت صـــحتها فقـــط من خلال الاختبار (Test). وقبل البدء بدراسة الكيفية التي يتم على أساســـها اختبار الفرضية، لابد من دراسة العلاقة الاقتصادية التي تستند إلى مجموعه من الفروض الخاصة بالنظرية الاقتصادية، كالعلاقة بين الكميه المطلوبة من سلعه ما وسعر تلك السلعة. وحسب منطق النظرية الاقتصادية تعكس دالة الطلب علاقة عكسية (سالبه) بين المتغير المستقل (السعر) والكميه المطلوبة (المتغير المعتمد).

أما إذا أخذنا العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي والدخل، فأن منطق النظرية يشير إلى ان الميل الحدي للاستهلاك (MPC) يكون موجباً ولكنه اقل من الواحد الصحيح، $0<MPC<1$، وان هناك حد أدنى للاستهلاك في الأمد القصير، ولكن لا يمكن الجزم بصـــحة أو عدم صحة ذلك إلا بعد أخذ البيانات وقياس العلاقة الاقتصادية واختبارها. وهذا ما سنتناوله في المباحث القادمة.

ويختبر نموذج الانحدار قبل كل شيء العلاقة بين المتغير المستقل (X) والتابع (Y) وذلك للتثبت من وجودها من خلال اختبار المعنوية الإحصائية للمعلمات المقدرة $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ كلاً على انفراد وفي هذا المجال توجد فرضيتان:

**1- فرضية العدم:** وتنص على عدم وجود علاقة بين المتغيرين X و Y أي ان:

$$H_0: B_0 = 0$$
$$B_1 = 0$$

**2- الفرضية البديلة:** وتنص على وجود علاقة بين X و Y ، أي ان:

$$B_0 \neq 0 \ H_1:$$
$$B_1 \neq 0$$

## 2.3 اختبار قيمة t، t-Value Test:

ولأجـل اختبار ما إذا كانت $B_0 = 0$ ،$B_1 = 0$ أم لا، يستخدم اختبار (t) عند مستوى معنوية معينة ودرجة حرية (n-k) والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

**أ- بالنسبة لــ $\hat{B}_1$:**

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} \quad ...(1.3)$$

حيث ان:

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_1}}$$

$$S^2_{\hat{B}_1} = \frac{S^2_{e_i}}{\sum x_i^2}$$

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

حيث ان:

t: هــو اختــيار (t) عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية (n-k) حيث (n) عدد المشاهدات في العينة و(k) عدد المعالم.

$\hat{B}_1$: القيمة التقديرية لـــ $B_1$ الحقيقية.

$S\hat{B}_1$: الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة $\hat{B}_1$.

$S_{\hat{B}_1}^2$: تباين $\hat{B}_1$ .

$S_{e_i}^2$: تباين الخطأ.

**ب- بالنسبة لـــ $\hat{B}_0$ فأن:**

$$t\hat{B}_0 = \frac{\hat{B}_0}{S\hat{B}_0} \quad \ldots(2.3)$$

حيث أن:

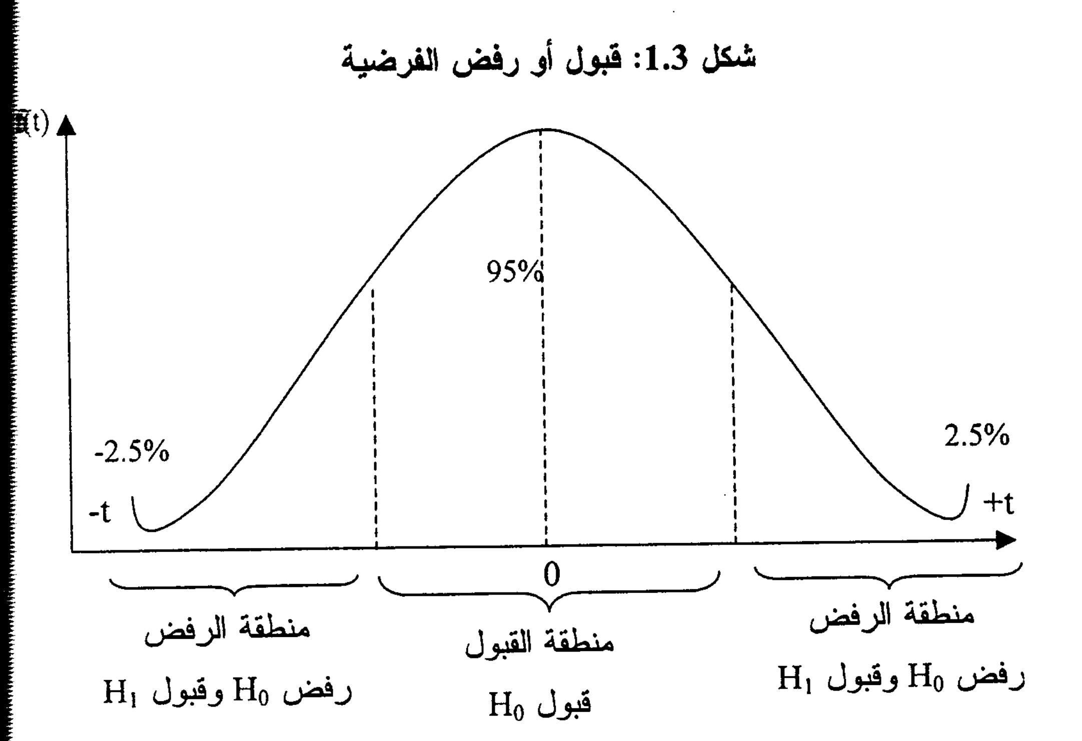
$$S\hat{B}_0 = \sqrt{S_{\hat{B}_0}^2}$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = S_{e_i}^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية (n-2) ومستوى المعنوية المطلوب (5%، 1%) لتحديد قبول أو رفض فرضـــية العدم. فإذا كانت قيمة t المحتسبة اكبر من قيمة t الجدولية ترفض فرضية العـــدم وتقبل الفرضية البديلة، بمعنى ان المعلمة ذات معنوية إحصائية. وبالعكس في حالـــة كـــون t المحتســـبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم وترفض الفرضـــية الـــبديلة أي عـــدم معنوية المعلمة المقدرة. ويمكن توضيح ذلك بالشكل (1.3).

**شكل 1.3: قبول أو رفض الفرضية**



ولاختبار معنوية المعلمات المقدرة $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ نعود الى بيانات المثال الوارد في (1.2)، وباعتماد الصيغة الرياضية للاختبار، فأننا نحتاج الإحصاءات الآتية:

| $\hat{Y}_i$ | $e_i$ | $e_i^2$ |
|---|---|---|
| 30.43333334 | -4.83333334 | 23.36111118 |
| 36.38095239 | -3.68095239 | 13.5494105 |
| 42.32857143 | 3.07142857 | 9.433673461 |
| 48.27619048 | 5.62380952 | 31.62723352 |
| 54.22380953 | 4.77619047 | 22.81199541 |
| 60.17142858 | 2.42857142 | 5.897959142 |
| 66.11904763 | -1.11904763 | 1.252267598 |
| 72.06666667 | -6.26666667 | 39.27111115 |
| $\sum \hat{Y}_i = 410$ | $\sum e_i = 0$ | $\sum e_i^2 = 147.204762$ |

أ- بالنسبة الى $\hat{B}_1$:

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{147.204762}{8-2} = 24.534127$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S_{e_i}^2}{\sum x_i^2} = \frac{24.534127}{672} = 0.036509117$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.036509117} = 0.191073592$$

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} = \frac{1.486904762}{0.191073592} = 7.781843354$$

وبما ان قيمة (t) المحتسبة والبالغة (7.781) اكبر من قيمة (t) الجدولية عند مستوى معـــنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة أي معنوية المعلمة المقدرة $\hat{B}_1$.

**ب- بالنسبة إلى $\hat{B}_0$:**

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{147.204762}{8-2} = 24.534127$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = S_{e_i}^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$= 24.534127 \left[\frac{1}{8} - \frac{(18)^2}{672}\right]$$

$$= 24.534127 \left[0.125 - 0.482142857\right]$$

$$= 14.89571996$$

$$S\hat{B}_0 = \sqrt{S_{\hat{B}_0}^2} = \sqrt{14.89571996} = 3.859497372$$

$$t\hat{B}_0 = \frac{\hat{B}_0}{S\hat{B}_0} = \frac{24.48571429}{3.859497372} = 6.344275415$$

وبمـــا ان قـــيمة (t) المحتســـبة عـــند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) هي (6.344) وهي اكبر من مثيلتها الجدولية البالغة (2.45)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، أي معنوية المعلمة المقدرة $\hat{B}_0$ عالية.

### 3.3 معامل التحديـــد، $(R^2)$ :Coefficient of Determination

هـــو مقياس يوضح نسبة التغير في المتغير التابع (Y) الذي سببها التغيير في المتغـــير المســـتقل (X). أي نســـبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار الى الانحرافات الكلية. ويمكن حساب هذا المعامل حسب الصيغ الآتية:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2} \qquad \ldots(3.3)$$

أو

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}$$

أو

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

أو

$$R^2 = r^2$$

أو

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

أو

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

ويمكن توضيح الصيغة الأخيرة من خلال الاشتقاق الآتي:

**الانحرافات غير الموضحة + الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار = الانحرافات الكلية**

$$\sum(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \qquad \ldots(4.3)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (4.3) على الانحرافات الكلية:

$$\frac{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2} + \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}$$

$$1 = R^2 + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$\therefore R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

وتتراوح قيمة $R^2$ بين الصفر والواحد، أي ان: $0 \le R^2 \le 1$

حيث أن $R^2 = 1$ عندما تقع جميع نقاط الانتشار على خط الانحدار المقدر أي $Y_i = \hat{Y}_i$ وهنا تكون العلاقة تامة.

وان $R^2 = 0$ (أو تقترب منه) عندما يكون خط انحدار العينة خطاً أفقياً أي $\hat{Y}_i = \overline{Y}$ ، ومعنى ذلك لا توجد علاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

وكـــل مـــن هاتيـــن الحالتين نادرة الحدوث، ففي الأحوال العادية يفسر خط الانحـــدار جـــزءاً مـــن التغيرات في Y وبالتالي يكون هناك جزءاً آخر غير مفسر بواسطة الخط ومن ثم نجد في أغلب الحالات $0 < R^2 < 1$.

ولمعـــرفة مقدار ما يفسره المتغير المستقل، X، من التغير في المتغير التابع، Y نعـــود إلى مثالنا الوارد في (1.2)، وبالاعتماد على الصيغ الرياضية الخاصة بـــ $R^2$ فان:

| $\hat{y}_i$ | $\hat{y}_i^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|
| −20.81666666 | 433.3336108 | 657.9225 |
| −14.86904761 | 221.0885768 | 344.1025 |
| −8.92142857 | 79.59188773 | 34.2225 |
| −2.97380952 | 8.843543061 | 7.0225 |
| 2.97380953 | 8.843543121 | 60.0625 |
| 8.92142858 | 79.59188791 | 128.8225 |
| 14.86904763 | 221.0885774 | 189.0625 |
| 20.81666667 | 433.3336113 | 211.7025 |
| $\sum \hat{y}_i = 0$ | $\sum \hat{y}_i^2 = 1485.715238$ | $\sum y_i^2 = 1632.92$ |

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{1485.715238}{1632.92} = 0.909851822 = \%90.98$$

هــذا يعني ان المتغير المستقل، $X_i$، يفسر حوالي 90.98% من التغيير الحاصل في المتغير التابع، $Y_I$، وان النسبة الباقية والبالغة 9.02% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = \frac{(1.486904762)(999.2)}{1632.92} = \frac{1485.715238}{1632.92}$$

$$R^2 = 0.909851 = \%90.98$$

or;

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = \frac{(1.486904762)^2 (672)}{1632.92} = \frac{(2.210885771)(672)}{1632.92}$$

$$R^2 = \frac{1485.715238}{1632.92} = 0.909851 = \%90.98$$

or:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{147.204762}{1632.92} = 1 - 0.090148177 = 0.909851822 = \%90.98$$

### 4.3 اختبار إحصائية F، F-Statistics:

لاختــبار معــنوية معادلة الانحدار ككل يستخدم اختبار F ويعتمد هو الآخر على نوعين من الفرضيات:

1- **فرضــية العــدم**: وتنص على عدم معنوية او جوهرية العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل ، أي ان:

$$H_0 : B_1 = 0$$

2- **الفرضــية البديلة**: وتنص على وجود علاقة جوهرية من الناحية الإحصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل ، أي ان:

$$H_1 : B_1 \neq 0$$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هو:

$$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n-k-1} \qquad \ldots(5.3)$$

أي ان اختــبار F هــو عــبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار مقســومة على عدد المتغيرات المستقلة (k) الى الانحرافات غير الموضحة مقسومة علــى درجات الحريــــة التي تتمثل بعدد المشاهدات (n) مطروحاً منها (k) ناقصاً (1).

وبعــد احتســاب قــيمة (F) تقارن مع قيمة (F) الجدولية المعطاة في الجداول الخاصــة بها عند مستوى المعنوية المطلوب (5%، 1%) ودرجة حرية (n-k-1, k) للبسط والمقام لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم. فإذا كانت قيمة (F) المحتسبة اكبر من قيمة (F) الجدولية، نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة أي معنوية العلاقة

المقـــدرة وبـــالعكس في حالة كون (F) المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم أي عدم معنوية العلاقة المقدرة او عدم معنوية معادلة الانحدار.

ويمكن احتساب قيمة F بالاعتماد على الصيغ الآتية:

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n-k-1} \quad \ldots(6.3)$$

أو

$$F = \frac{R^2 / k}{1-R^2 / n-k-1}$$

أو

$$F = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 / k}{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 / n-k-1}$$

أو

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n-k-1}$$

أو

$$F = t_{\hat{B}_1}^2$$

**العلاقة بين إحصائية F و t:**

ويُمكن توضيح العلاقة بين إحصائي F و t في نموذج المتغيرين كالآتي:

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n-k-1} \quad \ldots(7.3)$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2 / n-2}$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sigma^2}$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2}{\sigma^2 / \sum x_i^2}$$

$$\because \sigma^2 / \sum x_i^2 = var(\hat{B}_1) = S_{\hat{B}_1}^2$$

$$\therefore F = \frac{\hat{B}_1^2}{S_{\hat{B}_1}^2} = \left(\frac{\hat{B}_1}{S\hat{B}_1}\right)^2 = t_{\hat{B}_1}^2 \qquad \ldots(8.3)$$

ولاختــبار جوهــرية العلاقة بين المتغير التابع، Y، والمتغير المستقل، X، نعود إلى مثالنا (1.2)، وبالاعتماد على الصيغ الرياضية الخاصة بــ F نحصل على:

$$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n-k-1}$$

$$F = \frac{1485.715238/1}{147.204762/8-1-1} = \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.55708597$$

وبمـــا ان قـــيمة (F) المحتســـبة والبالـغة (60.55) اكبر من قيمة (F) الجدولية عند مســـتوى معـــنوية 5% ودرجـــة حرية (1، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.99)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل أي معنوية او جوهرية العلاقة المقدرة.

or:

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n-k-1}$$

$$= \frac{(1.486904762)(999.2)/1}{24.534127} = \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.5570$$

or:

$$F = \frac{R^2 / k}{1-R^2 / n-k-1}$$

$$= \frac{0.909851822/1}{1-0.909851822/8-1-1} = \frac{0.909851822}{0.015024696} = 60.5570$$

or:

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n-k-1}$$

$$= \frac{(1.486904762)^2 (672)/1}{24.534127} = \frac{(2.210885771)(672)}{24.534127}$$

$$= \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.5570$$

or:

$$F = t_{\hat{B}_1}^2$$

$$= (7.781843354)^2 = 60.5570$$

## 5.3 معامـــل الارتبـــاط البسيط، r، Simple Correlation Coefficient:

يقصـــد بالارتباط وجود علاقة بين ظاهرتين أو اكثر، ويسمى المقياس الذي تُقاس به درجة الارتباط بمعامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز (r). حيث ان تحليل الارتـــباط يعامل أي متغيرين بشكل متماثل، Symmetrically، ولا يوجد تمييز بين المتغـــير الـــتابع والمتغـــير أو المتغيرات المستقلة. تأسيساً على ذلك يفترض تحليل الارتـــباط ان كلا المتغيرين عشوائي، Random، أو تصـادفي، Stochastic، وهذا يتطلب احتمالية التوزيع الطبيعي. ويمكن حسابه على النحو الآتي:

$$r = \left[\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}}\right]\hat{B}_1 \qquad \ldots(9.3)$$

أو

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}}$$

أو

$$r = \mp\sqrt{R^2}$$

$\mp$ : تعتمد على إشارة $\hat{B}_1$.

أو

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{n S_X S_Y}$$

حيث ان:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \ , \ S_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}} \ ,$$

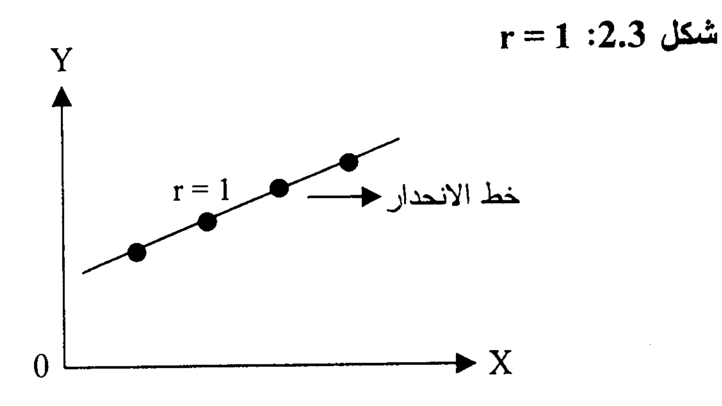
وتتراوح قيمة r بين +1 ، −1 اي ان:

$$-1 \leq r \leq +1$$

وقـد يكون الارتباط بين ظاهرتين أو اكثر موجباً أو سالباً والإشارة تدل على وجود علاقة طردية أو عكسية ولا تدل على قوة العلاقة التي تحدد من خلال الأرقام. ويمكن التمييز بين الخصائص الآتية:

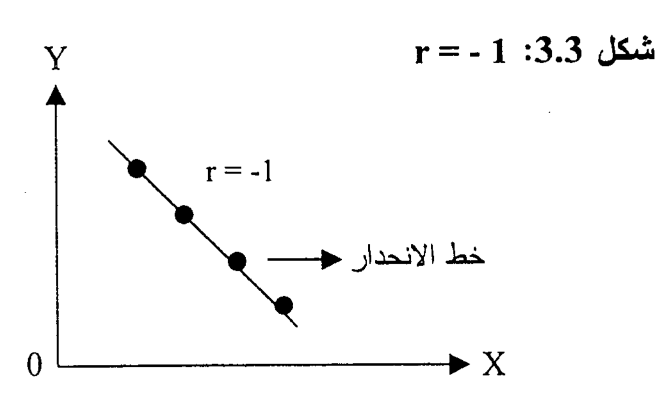
أ- عندما تكون r = 1 ، معنى ذلك وجود علاقة خطية تامة وموجبة بين المتغيرين X ، Y، اي ان الزيادة في قيمة المتغير X يترتب عليه زيادة في قيمة المتغير التابع Y.

**شكل 2.3: r = 1**



ب- عندما r = -1، معنى ذلك وجود علاقة خطية تامة وسالبة بين المتغيرين X، Y أي ان الـــزيادة فـــي قيمة المتغير المستقل X يترتب عليه انخفاض في قيمة المتغير التابع Y.

**شكل 3.3: r = - 1**




ج- عندما r = 0، معنى ذلك ليست هناك علاقة بين المتغيرين X، Y، في هذه الحالة ان تقديـــر المعامل B بطريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، يكون مساوياً للصفر. ويشير ذلك ان متوسط التغيرات في المتغير المستقل ليس لها تأثير على المتغـــير التابع. في مثل هذه الظروف فان معامل الارتباط يكون مساوياً للصفر، ذلـــك لأن الانحدار يوضح عدم وجود تباين أو انحراف في المتغير التابع، بمعنى آخر:

$$\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = 0$$

حيـــــث ان متوســـــط قـــيمة Y دائمـــاً تكـــون مســـاوية للقـــيمة المحسوبة، Calculated value، من معادلة الانحدار:

$$\sum(Y_i - \hat{Y})^2 = \sum(Y_i - \overline{Y})^2$$

حيث ان: $\hat{Y}_i = \overline{Y}$.

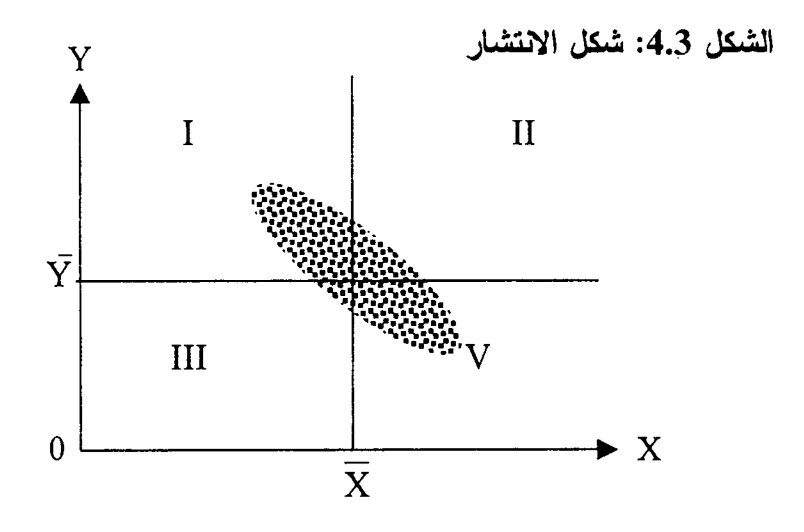
وبالتالي فان معادلة معامل التحديد البسيط $r^2$ يجب ان تساوي صفر، اي ان:

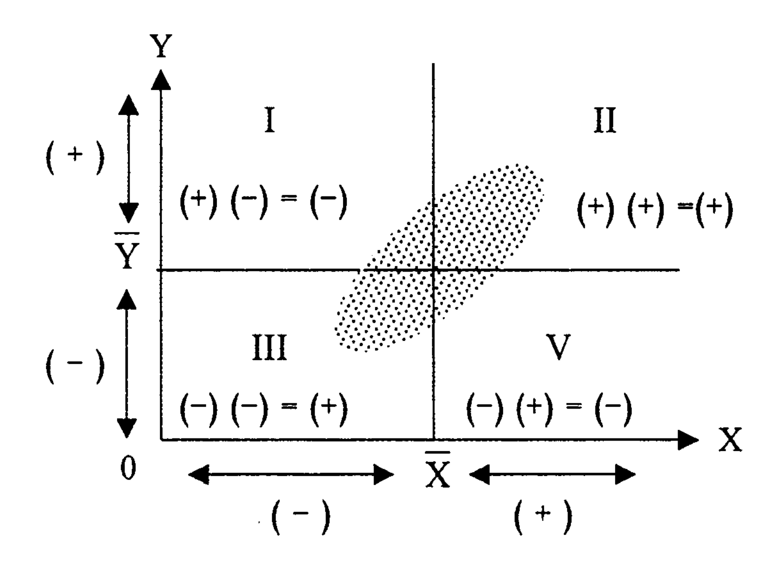
$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

يعني ذلك ان معامل الارتباط البسيط r ، يجب ان يساوي صفراً أيضاً.

ويمكـــن توضـــيح الارتباط بين متغيرين X، Y من خلال الشكل الانتشاري التالي الذي يعطي مؤشراً على قوة او ضعف الارتباط بين المتغير التابع Y، والمتغير المستقل X، وكما يأتي:

**الشكل 4.3: شكل الانتشار**






يبين الشكل أعلاه، انه عندما يكون انتشار المشاهدات قريبة جداً من خط الانحدار يدل علـــى قوة العلاقة بين المتغيرين X، Y. أما عندما تكون المشاهدات متباعدة عن خط الانحـــدار يدل ذلك على ضعف العلاقة أو الارتباط بين المتغيرين. ولذلك فان الشكل الانتشاري لا يعطي إلا فقط صورة مبسطة وأولية عن طبيعة العلاقة، فضلاً عن ذلك يمكن ملاحظة ما يأتي:

- فـــي المربعيـــن الثاني والثالث، تكون قيمة معامل الارتباط، r، موجبة وذلك لان معظم المشاهدات تتجمع في هذين المربعين، اي ان $(X_iY_i)$ لها الإشارة نفسها.
- في المربعين الأول والرابع، تكون قيمة معامل الارتباط، r، سالبة وذلك لان معظم المشـــاهدات تتجمع في هذين المربعين أي ان $X_i$ لها إشارة معاكسة لانحرافات $Y_i$.
- تقـــترب قـــيمة معـــامل الارتـــباط من الصفر، عندما يكون مجموع الانحرافات للمتغيريـــن X، Y عـــن وســـطها الحسابي تقترب من الصفر، أي عندما تنتشر

المشـــاهدات علـــى جميع أرباع الشكل، ويعني ذلك عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرين.

- تكون قيمة معامل الارتباط (r) موجبة، عندما يكون مجموع انحرافات المتغيرين عن وسطها الحسابي موجب.
- تكون قيمة معامل الارتباط، r، سالبة عندما يكون مجموع انحرافات المتغيرين عن وسطها الحسابي سالباً.

باختصار، يمكن توضيح العلاقات أعلاه في الصيغة الآتية:

**أ- عندما:**

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum x_i y_i > 0$$

معنى ذلك ان معامل الارتباط يكون موجباً.

**ب- عندما:**

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum x_i y_i < 0$$

معنى ذلك ان معامل الارتباط يكون سالباً.

ويظهر من ذلك ان مجموع حاصل ضرب الانحرافات $(\sum x_i y_i)$ يتأثر بعدد المشـــاهدات، أي انه كلما زاد عدد المشاهدات، كلما كان الارتباط بين X، Y موجباً وقويـــاً. ومعنى ذلك انه في حالة زيادة عدد المشاهدات للعينة يصبح معامل الارتباط أقوى، ولكنه يختلف عن مقياس آخر للظاهرة نفسها.

وبذلـــك فان مجموع حاصل ضرب الانحرافات $(\sum x_i y_i)$ لا يعتبر مقياساً ملائمـــاً لتبـــيان قـــوة العلاقة بين المتغيرين، وذلك لان المقياس يتأثر بوحدة القياس كالأمـــتار واللـــترات والديـــنار وغيرها. وبذلك لا تصلح للمقارنة في حالة اختلاف

وحـــدات القياس. ولكي نحصل على مقياس يبين قوة العلاقة، ويكون صالحاً لأجراء المقارنة نحتاج إلى معاملات لا تتأثر قيمتها بوحدات القياس المستخدمة. وهذا العامل يمكـــن الحصـــول عليه بقسمة مجموع الانحرافات $(\sum x_i y_i)$ على عدد المشاهدات (n)، أي ان:

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n}$$

ويســـمى هذا بالتباين المشترك، Covariance، ولكن الناتج ما يزال يتأثر بالعامل $y_i$ وهو وحدات القياس للمتغيرين، ولهذا يمكن تصحيح هذا التأثير بقسمة التباين المشترك على الانحراف المعياري لكل من X، Y أي $Se_x$، $Se_y$ على التوالي. ويمكن اعتماد هذا المقياس للوصول إلى تحديد قيمة معامل الارتباط البسيط.

**مـــثال 4.3:** وبالرجوع إلى البيانات الخاصة بالمثال (1.2) وباعتماد الصيغ الرياضية المذكورة أعلاه يمكن حساب معامل الارتباط (r) على النحو الآتي:

$$r = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}} . \hat{B}_1$$

$$= \sqrt{\frac{672}{1632.92}} \;.\; (1.486904762)$$

$$= (0.641508156)\,(1.486904762) = 0.953861532$$

إذن العلاقة بين المتغيرين X و Y طرديه.

or

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}.}$$

$$= \frac{999.2}{\sqrt{(672)(1632.92)}.} = \frac{999.2}{(25.92296279)(40.40940485)}$$

$$= \frac{999.2}{1047.5314978} = 0.9538$$

or

$$r = \mp\sqrt{R^2} = \sqrt{0.909851822} = 0.9538$$

or

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{n S_X S_Y}$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{672}{8}} = 9.16515139$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{1632.92}{8}} = 14.2868821$$

$$r = \frac{999.2}{(8)(9.16515139)(14.2868821)} = \frac{999.2}{1047.531498} = 0.9538$$

## 6.3 حـــدود الثقـــة لمعاملات الانحـــدار:

نعنـــي بحـــدود أو فترات الثقة لمعاملات الانحدار، تقدير مدى الثقة التي تقع ضـــمنها القـــيمة الحقيقـــية للمعلمة أي معلمة المجتمع. ويراد بحدي الثقة الحد الأدنى Lower Limit الذي يرمز له بالرمز (L) والحد الأعلى Upper Limit الذي يرمز لـــه بالرمز (U). ويعني ذلك تحديد مدى تتراوح فيه قيمة B بين هذه الحدين. بمعنى آخـــر يمكـــن القول إلى أي مدى ممكن تحريك توزيع t إلى اليسار أو اليمين قبل ان تصـــل إلى القيمة الحرجة، Critical Value. والصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

(الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة) $(t\alpha/2)\mp$ المعلمة المقدرة = معلمة المجتمع

تـــتراوح قيمة معامل الثقة بين 90%، 100%. كما ان مستوى المعنوية هو احتمال تكميلي لمعامل الثقة، هذا يعني ان حاصل جمع معامل الثقة ومستوى المعنوية يساوي 1. فإذا كان معامل الثقة 95%، فان مستوى المعنوية يكون 5% وهكذا. وبناء على ما جاء أعلاه، يمكن تعريف فترة الثقة بأنها "الفترة التي توجد فيها القيمة الفعلية لـــ $B_1$ بين حد أدنى وأعلى وباحتمال معين".

**مـــثال 5.3:** ولتوضيح كيفية احتساب حدود الثقة نعود إلى بيانات المثال (1.2)، حيث ان (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) تساوي (2.45)، لذا فان معامل الثقة هو 95%.

**فبالنسبة إلى $B_1$، فان:**

$$B_1 = \hat{B}_1 \mp (t\alpha/2)(S_{\hat{B}_1})$$
$$B_1 = 1.486904762 \mp (2.45)(0.191073592)$$
$$B_1 = 1.486904762 \mp 0.4681303$$

$$1.018774462 < B_1 < 1.955035062$$

هــذا يعنـــي ان هناك احتمال 95% ان تكون قيمة $\hat{B}_1$ مساوية لــ$B_1$ الحقيقية بين الحدين الأعلى 1.955 والأدنى 1.018 وان هناك احتمال 5% ان لا تكون كذلك.

**أما بالنسبة لــ $B_0$ فإن:**

$$B_0 = \hat{B}_0 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_0)$$
$$B_0 = 24.48571429 \mp (2.45)(3.859497372)$$
$$B_0 = 24.48571429 \mp 9.455768561$$
$$15.02994573 < B_0 < 33.94148285$$

هــذا يعنـــي ان هناك احتمال 95% ان تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع $B_0$ بين الحدين الأعلى 33.941 والأدنى 15.029 وان هناك احتمال 5% ان تقع خارج هذين الحدين.

وقد جرى استخدام مستوى الثقة 95% في الدراسات الاقتصادية ويعني ذلك ان 95% من الحالات تقع ضمن فترة الثقة، وان 5% من الحالات تقع خارج هذه الفترة. بمعنى آخر إذا كانت $B_0=0.05$ فأن احتمال $B_1$ ان توجد بين الحدين 95%.

## جــدول تحليــل التبايــن:

يهــدف جدول تحليل التباين، ANOVA Table، إلى توضيح تأثير المتغير المســتقل فــي المتغير التابع. وتزداد أهمية هذا الجدول عند دراسة الانحدار المتعدد حيث يستفاد منه في معرفة تأثير كل متغير من المتغيرات المستقلة في المتغير التابع وبالتالي اعتماد المتغيرات المؤثرة في النموذج.

ويمكن بناء جدول تحليل التباين في ضوء المعلومات التفصيلية أدناه:

### جــدول تحليــل التبايــن

| مصدر التباين | مجموع مربعات الانحرافات | درجات الحرية | متوسط مربعات الخطأ | F |
|---|---|---|---|---|
| الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار أي بواسطة المتغير المستقل $X_i$ | $\sum \hat{y}_i^2 = \hat{B}_1 \sum x_i y_i$ | **k** | $\sum \hat{y}_i^2 / k$ | $F = \dfrac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$ |
| الانحرافات غير الموضحة | $\sum e_i^2$ | **n-k-1** | $\sum e_i^2 / n - k - 1$ | |
| الانحرافات الكلية | $\sum y_i^2$ | **n – 1** | | |

ويمكـــن بـــناء جـــدول تحليل التباين لمثالنا بعد ان تم تطبيق جميع الاختبارات عليه كالآتي:

| مصدر التباين | مجموع مربعات الانحرافات | درجات الحرية | متوسط مربعات الخطأ | F |
|---|---|---|---|---|
| الانحرافات الموضحة من قبل $X_i$ | **1485.715238** | **1** | **1485.715238/1** | $F = \frac{1485.715238/1}{147.204762/6} = 60.55708597$ |
| الانحرافات غير الموضحة | **147.204762** | **8-1-1=6** | **147.204762/6** | |
| الانحرافات الكلية | **1632.92** | **7** | | |

### 7.3 التنبـــؤ، Forecasting:

أحـــد الأهداف الرئيسة لتطبيق بحث الاقتصاد القياسي هو استخدام النموذج المقـدر للتنــبؤ بقــيمة المتغيرات التابعة استناداً إلى قيم المتغيرات المستقلة من أجل الـتعرف علــى مسار الظاهرة موضوع البحث في المستقبل، حيث يعرف التنبؤ بأنه تحلــيل بـيانات الماضـــي وتطبيق نتائجها على المستقبل من خلال استخدام نموذج رياضي مناسب. أي ان $(\hat{Y}_i)$ يمكن ان تستخدم في التنبؤ بقيمة $(Y_i)$ الجديدة ولتكن $(Y_{t+1})$ في حالة الاعتماد على قيمة $(X_i)$ الجديدة ولتكن $(X_{t+1})$.

وللتنبؤ أخطاء وقد ينشأ بسبب:

- خطأ التقدير $Y_{t+1} - E(Y_{t+1})$
- خطأ المعاينة $E(Y_{t+1}) - YP_{t+1}$

وعلــيه فـــان الخطأ الحاصل في التنبؤ عن قيمة المفردة الواحدة هو مجموع نوعين من الانحراف أي:

$$Y_{t+1} - YP_{t+1} = [Y_{t+1} - E(Y_{t+1})] + [E(Y_{t+1}) - YP_{t+1}]$$

ولأغـــراض التنبؤ نفترض أن القيمة المراد التنبؤ بها، تقع خارج قيم $(X_i)$ المشمولة بالعيـــنة أي ان المحاولـــة الجديـــدة تكون مستقلة عن القيم التي استخدمت في تحليل الانحدار، حيث ان معادلة الخط المستقيم الحقيقية هي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \quad \ldots(10.3)$$

المعادلة التقديرية لها:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \quad \ldots(11.3)$$

المعادلة الحقيقية في الفترة t+1 هي:

$$Y_{t+1} = B_0 + B_1X_{t+1} + U_{t+1} \qquad ...(12.3)$$

فالمعادلة التنبؤية في الفترة t+1 تكون:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1X_{t+1} \qquad ...(13.3)$$

عليه فأن خطأ التنبؤ يكون:

$$Y_{t+1} - YP_{t+1} = B_0 + B_1X_{t+1} + U_{t+1} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1X_{t+1} \qquad ...(14.3)$$

ان مقـــدرات (OLS) هـــي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة وان خطأ التنبؤ يعتمد علـــى عنصـــر الخطـــأ العشوائي، أي $(U_{t+1})$. ونفترض ان قيمة الخطأ العشوائي $(U_{t+1})$مستقلة عن القيم $U_1, U_2, ..., U_n$ وأنها تتوزع توزيعاً طبيعياً، كذلك فان خطـــأ التنـــبؤ يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي صفر وتباين ثابت. ويمكن إثبات ذلك كالآتي:

**أولاً: الوسط الحسابي المساوي للصفر:**

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = E(B_0 + B_1X_{t+1} + U_{t+1}) - E(\hat{B}_0 + \hat{B}_1X_{t+1})$$
$$= B_0 + B_1X_{t+1} + E(U_{t+1}) - E(\hat{B}_0) - E(\hat{B}_1)X_{t+1}$$

$$\because E(\hat{B}_0) = B_0 \quad , E(\hat{B}_1) = \hat{B}_1$$

$$\therefore E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = B_0 + B_1X_{t+1} + E(U_{t+1}) - B_0 - B_1X_{t+1}$$

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = E(U_{t+1})$$

ولما كانت:

$$E(U_{t+1}) = 0$$

فإن:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = 0$$

**ثانياً: تبايـن خطـأ التنبـؤ:**

$$\sigma^2 P = E[(Y_{t+1} - YP_{t+1}) - E(Y_{t+1} - YP_{t+1})]^2$$

وبما ان خطأ التنبؤ وسطه الحسابي يساوي صفر، أي ان:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = 0$$

$$\therefore \sigma^2 P = E[(Y_{t+1} - YP_{t+1})]^2$$

$$\sigma^2 P = E[(B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{t+1}]^2$$

$$\sigma^2 P = E[U_{t+1} + \{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}]^2$$

$$\sigma^2 P = EU_{t+1}^2 + 2\{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}EU_{t+1} + E\{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}^2$$

ولما كانت:

$$EU_{t+1} = 0$$

إذن الحد الثاني بكامله يساوي الصفر:

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + E(B_0 - \hat{B}_0)^2 + 2X_{t+1} E(B_0 - \hat{B}_0)(B_1 - \hat{B}_1) + X_{t+1}^2 E(B_1 - \hat{B}_1)^2$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + var(\hat{B}_0) + X_{t+1}^2 var(\hat{B}_1) + 2X_{t+1} cov(B_0 B_1)$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right] + X_{t+1}^2 \left[ \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \right] - 2X_{t+1} \overline{X} \left[ \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[ \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 \overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right] + X_{t+1}^2 \left[ \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \right] - 2X_{t+1} \overline{X} \left[ \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \right]$$

وبضرب الجزء الأول من الحد الثاني وتقسيمه على $\sum x_i^2$:

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2} + \frac{\sigma^2 \overline{X}^2}{\sum x_i^2} + X_{t+1}^2 \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} - 2X_{t+1} \overline{X} \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \left[ \frac{\sum x_i^2}{n} + \overline{X}^2 + X_{t+1}^2 - 2X_{t+1} \overline{X} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \left[ \frac{\sum x_i^2}{n} + (X_{t+1} - \overline{X})^2 \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[ \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2} + \frac{\sigma^2 (X_{t+1} - \overline{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[ \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 (X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

وإذا رمزنا لتباين خطأ التنبؤ بالرمز $S^2P$ فان معادلة تقدير تباين خطأ التنبؤ تكون:

$$S^2 P = \sigma^2 \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

وعليه فإن:

$$(Y_{t+1} - YP_{t+1}) \sim N(0, S^2P)$$

بعبارة أخرى ان:

خطأ التنبؤ $(Y_{t+1} - YP_{t+1})$ يتوزع، ~، توزيعاً طبيعياً، N، بوسط حسابي مساوي للصفر وتباين ثابت مقداره $S^2P$ .

أما اختبار (t) فيتم بموجب:

$$\sigma^2 U = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

$$S^2YP_{t+1} = \sigma^2u\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2YP_{t+1}}$$

$$t = \frac{YP_{t+1}}{SYP_{t+1}}$$

أما حدود الثقة فهي:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

ويتم إيجاد $YP_{t+1}$ من خلال:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1X_{t+1}$$

**مــثال 6.3:** ولتوضــيح التنبؤ في ضوء الصيغ أعلاه نرجع إلى البيانات الاحصائية الخاصة بمثالنا (1.2) ومنها:

$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762X_i$$

وللتنبؤ بقيمة $YP_{t+1}$ عندما $X_{t+1} = 36$ فإن:

$$YP_{t+1} = 24.48571429 + 1.486904762(36)$$

$$= 78.01428572$$

ألف دينار معدل الأجر السنوي لموظف له من الخدمة 36 سنة.

ولتقدير حدود ثقة 95% للمعلمة $Y_{t+1}$ فإن:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

وللحصول على $SYP_{t+1}$ فإن:

$$\sigma^2 U = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{147.204762}{8-2} = 24.534127$$

$$S^2 YP_{t+1} = \sigma^2 \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \overline{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$= 24.534127 \left[ 1 + \frac{1}{8} + \frac{(36-18)^2}{672} \right]$$

$$= 24.54127 \left[ 1 + 0.125 + \frac{324}{672} \right]$$

$$= 24.534127 [1 + 0.125 + 0.482142857]$$

$$= 24.534127 \, [1.607142857]$$

$$= 39.42984696$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2 YP_{t+1}} = \sqrt{39.42984696} = 6.279318989$$

$$\therefore Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

$$Y_{t+1} = 78.01428572 \mp (2.45)(6.279318989)$$

$$Y_{t+1} = 78.01428572 \mp 15.38433152$$

$$62.6299542 < Y_{t+1} < 93.39861724$$

**مثال شامل:** في ضوء المجاميع الآتية التي تمثل العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما $(Y_i)$ وسعرها $(X_i)$ مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة:

$$n = 8 \ , \ \sum Y_i = 32 \ , \ \sum X_i = 24 \ , \ \sum X_i Y_i = 86$$
$$\sum X_i^2 = 96 \ , \ \sum Y_i^2 = 140$$

**المطلوب:**

1- احتساب معلمات العلاقة بطريقة المعادلات الطبيعية ، المحددات، الانحرافات، المصفوفات.

2- اختبار معنوية المعالم المقدرة عند مستوى معنوية 5% إذا علمت ان (t) الجدولية عند مستوى المعنوية المذكور ودرجة حرية (6) هي 2.31.

3- كون حدود ثقة 95% لكل من $B_0$ ، $B_1$.

4- وضح مقدار ما يفسره المتغير المستقل من التغير في المتغير التابع.

5- أوجد معامل ارتباط $X_i$ و $Y_i$ .

6- أختبر معنوية المعادلة المقدرة إذا علمت ان قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1، 6) للبسط والمقام تساوي 5.99.

7- حلل تباين المعالم باستخدام جدول ANOVA.

8- تنبأ بقيمة $YP_{t+1}$ واحسب فترة ثقة 95% للمعلمة $Y_{t+1}$ عند $X_{t+1} = 10$ .

**الحـــل:**

1- احتساب معلمات العلاقة:

*** بطريقة المعادلات الطبيعية:**

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \qquad \ldots(15.3)$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \qquad \ldots(16.3)$$

$$32 = 8\hat{B}_0 + 24\hat{B}_1 \qquad \ldots(17.3)$$

$$86 = 24\hat{B}_0 + 96\hat{B}_1 \qquad \ldots(18.3)$$

وبضرب المعادلة (17.3) في (3) نحصل على:

$$96 = 24\hat{B}_0 + 72\hat{B}_1$$

$$86 = 24\hat{B}_0 + 96\hat{B}_1$$

بالطرح نحصل:

$$10 = -24\hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{10}{-24} = -0.416$$

وللحصـــول علـــى قـــيمة $\hat{B}_0$ يتم تعويض قيمة $\hat{B}_1$ في أحد المعادلتين الأساسيتين ولتكن معادلة (3).

$$32 = 8\hat{B}_0 + 24\hat{B}_1$$

$$32 = 8\hat{B}_0 + 24(-0.416)$$

$$32 = 8\hat{B}_0 - 9.984$$

$$32 + 9.984 = 8\hat{B}_0$$

$$41.984 = 8\hat{B}_0$$

$$\hat{B}_0 = \frac{41.984}{8} = 5.248$$

$$\therefore \hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

$$\hat{Y}_i = 5.248 - 0.416X_i$$

تشـــير المعادلة التقديرية إلى وجود علاقة عكسية بين المتغير المستقل $X_i$ الذي يمثل السعر والمتغير التابع $Y_i$ الذي يمثل الكمية المطلوبة فكل زيادة في السعر $X_i$ بمقدار وحدة واحدة سوف تؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة بمقدار 0.416 وحدة.

*** طريقة المحددات:**

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{bmatrix} = (8)(96) - (24)(24) = 768 - 576 = 192$$

$$|N_0| = \begin{bmatrix} 32 & 24 \\ 86 & 96 \end{bmatrix} = (32)(96) - (24)(86) = 3072 - 2064 = 1008$$

$$|N_1| = \begin{bmatrix} 8 & 32 \\ 24 & 86 \end{bmatrix} = (8)(86) - (32)(24) = 688 - 768 = -80$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|N_0|}{|D|} = \frac{1008}{192} = 5.2$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{-80}{192} = -0.416$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 5.2 - 0.416 X_i$$

*** طريقة الانحرافات:**

من بيانات السؤال يمكن استخراج الانحرافات وكما يأتي:

$$\sum x_i y_i = \sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}$$

$$= 86 - \frac{(96)(32)}{8} = 86 - 96 = -10$$

$$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}$$

$$= 96 - \frac{(24)^2}{8} = 96 - 72 = 24$$

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$

$$= 140 - \frac{(32)^2}{8} = 140 - 128 = 12$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{-10}{24} = -0.416$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}$$

$$\hat{B}_0 = 4 - (-0.416)(3)$$

$$\hat{B}_0 = 4 + 1.248$$

$$\hat{B}_0 = 5.2$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 5.2 - 0.416 X_i$$

*** طريقة المصفوفات:**

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$|X'X| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{vmatrix} = 768 - 576 = 192$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \operatorname{adj} X'X$$

$$\operatorname{adj} X'X = \begin{bmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{192}\begin{bmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.125 \\ -0.125 & 0.041666666 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.125 \\ -0.125 & 0.041666666 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 16+(-10.75) \\ -4+3.583333276 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 5.2 \\ -0.416 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 5.2 - 0.416 X_i$$

**2- اختبار معنوية المعالم المقدرة:**

**أ- بالنسبة إلى $\hat{B}_1$ :**

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$
$$\sum \hat{y}_i^2 = \hat{B}_1 \sum x_i y_i = (-0.416)(-10) = 4.16$$
$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \sum \hat{y}_i^2$$

$$\sum e_i^2 = 12 - 4.16 = 7.84$$

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{7.84}{8-2} = 1.306666667$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S_{e_i}^2}{\sum x_i^2} = \frac{1.306666667}{24} = 0.054444444$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.054444444}4 = 0.233333333$$

$$t\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}^2} = \frac{-0.416}{0.233333333} = -1.782857145$$

وبما ان قيمة (t) المحتسبة والبالغة (1.782) اقل من قيمة (t ) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6)، والبالغة (2.31) عليه تقبل فرضية العدم، أي عدم معنوية المعلمة المقدرة ($\hat{B}_1$).

**ب- بالنسبة لـ** $\hat{B}_0$:

$$S_{e_i}^2 = 1.306666667$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = S_{e_i}^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$S^2_{\hat{B}_0} = 1.306666667\left[\frac{1}{8}+\frac{(3)^2}{24}\right]$$
$$= 1.306666667[0.125+0.375]$$
$$= 1.306666667(0.5)$$
$$= 0.653333333$$

$$S_{\hat{B}_0} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_0}} = \sqrt{0.653333333} = 0.808290377$$

$$t\hat{B}_0 = \frac{\hat{B}_0}{S_{\hat{B}_0}} = \frac{5.2}{0.808290377} = 6.4333317$$

وبمـــا ان قيمة (t) المحتسبة والبالغة (6.433) اكبر من مثيلتها الجدولية عند مستوى (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.31)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل اي معنوية المعلمة المقدرة $(\hat{B}_0)$.

**3- حــــدود الثقـــة:**

أ- بالنسبة إلى $B_0$:

$$B_0 = \hat{B}_0 \mp (t\alpha/2)(S_{\hat{B}_0})$$
$$B_0 = 5.2 \mp (2.31)(0.808290377)$$
$$B_0 = 5.2 \mp 1.867150771$$
$$3.332849229 < B_0 < 7.067150771$$

هـناك احتمال 95% ان تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع $B_0$ بين الحدين الأعلى 7.067 والأدنى 3.332، وهناك احتمال 5% ان تقع خارج هذين الحدين.

**ب- بالنسبة إلى $B_1$:**

$$B_1 = \hat{B}_1 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_1)$$

$$B_1 = -0.416 \mp (2.31)(0.233333333)$$

$$B_1 = -0.416 \mp 0.538999999$$

$$-0.95999999 < B_1 < 0.122999999$$

هناك احتمال 95% ان تكون قيمة $\hat{B}_1$ مساوية إلى $B_1$ بين الحدين الأعلى 0.123 والأدنى 0.96-، وهناك احتمال 5% ان لا تكون كذلك.

**4- معامل التحديد $R^2$:**

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = \frac{(-0.416)(-10)}{12} = \frac{4.16}{12} = 0.346666666 = \%34.666$$

هـــذا يعنـــي ان المتغير المستقل $X_i$ والذي يمثل السعر يفسر حوالي 34.666% من التغـــير الحاصـــل في المتغير التابع $Y_i$ والذي يمثل الكمية المطلوبة من السلعة وان النســـبة الباقـــية والبالغة 65.334% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة كالدخل، أسعار السلع البديلة ...الخ.

**5- معامل الارتباط بين $X_i$ و $Y_i$:**

$$r = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}}.\hat{B}_1$$

$$r = \sqrt{\frac{24}{12}}(-0.416)$$

$$r = \sqrt{2}.(-0.416)$$

$$r = 1.414213562(-0.416)$$

$$r = -0.588312841$$

أذن العلاقة عكسية، ضعيفة بين المتغيرين $X_i$ ، $Y_i$.

**6- اختبـــار F:**

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i \ / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

$$F = \frac{(-0.416)(-10)/1}{7.84/8-1-1} = \frac{4.16}{1.306666667} = 3.183673469$$

وبمـــا ان قيمة F المحتسبة والبالغة (3.183) اقل من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1،6) للبسط والمقام والبالغة (5.99)، عليه نقبل فرضية العدم والتي تنص على عدم معنوية العلاقة المقدرة.

**7- جدول تحليل التباين:**

| مصدر التباين | مجموع مربعات الانحرافات | درجات الحرية | متوسط مربعات الخطأ | F |
|---|---|---|---|---|
| $\sum \hat{y}_i^2$ | 4.16 | 1 | 4.16 | $F = 3.183$ |
| $\sum e_i^2$ | 7.84 | 6 | 1.306666667 | |
| $\sum y_i^2$ | 12 | 7 | | |

**8- التنبـــؤ:**

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1}$$
$$YP_{t+1} = 5.2 + (-0.416)(10)$$
$$YP_{t+1} = 5.2 - 4.16$$
$$YP_{t+1} = 1.04$$

ولتقدير فترة الثقة نحتاج حساب $SYP_{t+1}$:

$$S^2YP_{t+1} = \sigma^2\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(X_{t+1}-\overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$=1.306666667\left[1+\frac{1}{8}+\frac{(10-3)^2}{24}\right]$$

$$=1.306666667\left[1+0.125+2.041666667\right]$$

$$=1.306666667\,(3.16666667)$$

$$=4.137777779$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2YP_{t+1}} = \sqrt{4.137777779} = 2.034152841$$

وبذلك فان حدود الثقة لــ $Y_{t+1}$ تكون:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

$$Y_{t+1} = 1.04 \mp (2.31)(2.034152841)$$

$$Y_{t+1} = 1.04 \mp 4.698893063$$

$$-3.658893063 < Y_{t+1} < 5.738893063$$

## الأسئلة والتمـــــارين

**السؤال 1.3**: ماذا تعني معلمات المعادلة الآتية:

$$C_t = 20.12 + 0.31Y_t$$

حيث أن:

$C_t$: تمثل الأنفاق الخاص.

$Y_t$: تمثل الدخل المتاح.

$$\overline{C} = 400 \quad , \quad \overline{Y} = 800$$

**السؤال 2.3**: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الآتية:

$$\hat{C}_i = 15 + 0.81Y_i$$
$$(3.1) \quad (18.7) \quad n = 19$$

حيث أن الأرقام بين القوسين تشير الى قيمة (t) العملية (المحتسبة).

أ- أحسب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة.

ب- ضـــع حدود ثقة ولمستوى دلالة (95%) لمعامل المتغير المستقل $(Y_i)$ مستخدماً $t\,(n-2\ ,\ \alpha/2) = 2.11$ .

**السؤال 3.3**: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 21.5 + 0.84X_t$$
$$S.E \quad (9.4) \quad (0.024) \qquad n = 12 \qquad R^2 = 0.992$$

حيث أن الأرقام بين القوسين تشير الى الانحراف المعياري.

أ- اختبر مدى معنوية المعلمات المقدرة، مستخدماً $t\ (10\ ,\ 0.05) = 2.23$

ب- اختبر مدى معنوية العلاقة الخطية بين $Y_t$ و $X_t$ مستخدماً $F\ (10\ ,\ 2\ ,\ 0.05) = 4.10$

**السؤال 4.3**: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الآتية:

$$\hat{Y}_t = 21.5 + 0.84 X_t$$
$$S.E\quad (9.4)\quad (0.024)$$
$$n = 12\ ,\ R^2 = 0.992$$

حيث ان الأرقام بين قوسين تشير إلى الانحراف المعياري.

أ- اختبر مدى معنوية المعلمات المقدرة ، مستخدماً $t\ (10, 0.05) = 2.23$

ب- اختبر مدى معنوية العلاقة الخطية بين $Y_t$، $X_t$ مستخدماً $F(10,2,0.05) = 4.10$ .

**السؤال 5.3**: ماذا تعني النتائج في المعادلة الآتية:

$$C_t = 20.12 + 0.31\, Y_t$$

حيث ان:

$C_t$ : تمثل الأنفاق الخاص.

$Y_t$ : تمثل الدخل المتاح.

$$\bar{Y} = 800\quad ,\ \bar{C} = 400$$

**السؤال 6.3**: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الآتية:

$$\hat{C}_t = 15 + 0.81\,Y_t$$
$$(3.1)\quad (18.7)\quad n = 19$$

حيث ان الأرقام بين القوسين تشير إلى قيمة (t) العملية.

أ- احسب الانحراف المعياري للمعالم المقدرة.

ب- ضـــع حدود ثقة ولمستوى دلالة (95%) لمعامل المتغير المستقل ($Y_i$) مستخدماً $t(n-2, \alpha/2) = 2.11$.

**السؤال 7.3:** إذا أعطيت الحسابات الوسطية الآتية عن الكمية المطلوبة من سلعة ما (Y) وسعرها (X).

$$\sum(X-\overline{X})^2 = 280 \quad , \sum(Y-\overline{Y})^2 = 520$$
$$\sum(X-\overline{X})(Y-\overline{Y}) = -360, \quad \sum X = 40\,, \sum X = 100,\, n = 10$$

قـــدر معلمات العلاقة $Y = b_0 + b_1X$ مع التعليق واكتب جدول تحليل التباين واختبر معنوية العلاقة المقدرة باستخدام اختبار (F) تحت مستوى معنوية (0.05) إذا علمت ان F الجدولية:

$$F = (0.05,\ 1,8) = 5.3$$
$$F = (0.05,\ 2,10) = 4.1$$

**السؤال 8.3:** قدر باحث دالة الاستيراد الآتية حيث يمثل (Y) الاستيراد ويمثل (X) الدخل القومي وذلك باستخدام عينة من عشرين مشاهدة.

$$Y = 200 + 0.5\,X$$
$$S.E \quad 20 \quad 0.04$$

أ- اختـــبر المعنوية الإحصائية لمعلمة المتغير المستقل (X) فيما إذا كانت تختلف عن الصـــفر تحـــت مستوى معنوية (0.05) موضحاً الفرضية الإحصائية المراد اختبارها.

ب-أوجد حدود الثقة لهذه المعلمة (معلمة X) عند مستوى دلالة 95% مع التعليق.

إذا علمت ان t الجدوليه:

$t\,(0.025, 18) = 2.4$
$t\,(0.05, 20) = 2.1$

علماً بأن العمليات الحسابية الخاصة بمشاهدات المتغير $(Y_t)$ و$(X_t)$ كانت كالآتي:

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t = 30 \quad , \quad \sum_{t=1}^{5} Y_t^2 = 190 \quad , \quad \sum_{t=1}^{5} Y_t = 12 \quad ,$$

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t^2 = 34 \quad , \quad \sum_{t=1}^{5} X_t Y_t = 74$$

**المطلوب:** تقدير كل من $B_0$ و $B_1$.

**الســـؤال 39.:** تنص نظرية العرض على وجود علاقة طردية بين الكمية المعروضة مـــن ســـلعة مـــا وسعرها، أدناه الكمية المعروضة من سلعة ما بالطن $(Y_i)$ وسعرها بالدينار للكيلو غرام الواحد $(X_i)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **$Y_i$:** | 0.70 | 1.15 | 1.35 | 2.05 | 2.30 |
| **$X_i$:** | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 |

أ- قدر العلاقة بين المتغيرين المذكورين باستخدام أسلوب الانحرافات.

ب- أوجد معامل التحديد من خلال قانون الانحرافات غير الموضحة.

**السؤال 10.3:** البيانات الآتية تم الحصول عليها من عينة من الناتج للمدة (1985-1999) حيث X تمثل كمية الناتج و Y تمثل تكلفة الوحدة من الناتج.

$$\overline{X}=7 \quad , \overline{Y}=9 \quad , \sum x_i y_i=-28 \quad , R^2=0.327$$

$$\sum X_i^2=795 \quad , \quad F_{5\%}=4.54$$

أ- قدر دالة التكاليف.

ب- اختبر معنوية المعادلة المقدرة من خلال $\sum e_i^2$.

**السؤال 11.3:** إذا أعطيت جدول تحليل التباين الآتي:

| مصدر الانحرافات | حجم المربعات | درجات الحرية | متوسط في الانحرافات | F |
|---|---|---|---|---|
| الانحرافات الموضحة | ? | ? | 23.43 | ? |
| الانحرافات غير الموضحة | ? | ? | ? | |
| الانحرافات الكلية | ? | 7 | | |

أ- هل ان معادلة العرض الآتية معنوية ؟

$$\hat{Y}=6.36+0.83X_i$$

حيث ان X تمثل السعر.

ب- أختبر معنوية المعلمات.

جـ- قدر فترة ثقة 95% للمعلمة $b_1$.

استفد من المعطيات الإحصائية الآتية:

$$R^2 = 0.65 \ , \quad F_{5\%} = 8.81 \ , \quad \sum x_i^2 = 34$$

$$\overline{Y} = 13 \quad \overline{X} = 8 \quad \sum x_i y_i = 28 \quad t_{5\%} = 2.45$$

السؤال **12.3**: ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

# الفصل الرابع: الانحدار الخطي المتعدد

# Multiple Linear Regression

# الفصل الرابع :الانحـــدار الخطـــي المتعـــدد

# Multiple Linear Regression

## 1.4 مقدمـــــــــة:

يتضـــح مما سبق أن الانحدار البسيط يركز على دراسة العلاقة بين متغيرين أحدهمـــا المتغـــير المســـتقل (X) والآخرالمتغـــير التابع (Y). غير أن واقع الحياة الاقتصادية والاجتماعية مبني بشكل عام على تأثر أية ظاهرة بأكثر من متغير مستقل، فدالـــة الطلـــب مـــثلاً، تحدد العلاقة بين الكميات المطلوبة من سلعة معينة، والأسعار الخاصـــة بهـــذه الســـلعة، وغيرها من السلع (أسعار السلع البديلة) ويدخل فيها دخل المستهلك كأحد المتغيرات فضلاً عن المتغيرات الأخرى. لذلك لابد من توسيع نموذج الانحـــدار الســـابق ليشتمل على انحدار للمتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المســـتقلة $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ويســـمى هـــذا بـــنموذج الانحـــدار الخطـــي المتعدد Multiple Linear Regression.

يهـــدف هذا الفصل الى توضيح كيفية تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد الـــذي يـــتكون مـــن متغير تابع ومتغيرين أو أكثر من المتغيرات المستقلة. لذلك سيتم مناقشـــة طبيعة نموذج الانحدار المتعدد، ثم تحديد أهم افتراضات النموذج التي سبق وأن تعرفـــنا علـــيها في الفصل الثاني، يضاف إلى ذلك بيان عدم وجود علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة وكيف ان المصفوفة $(X'X)$، تكون مصفوفة غير شاذة (Non-Singular) إذا كـــان محددها لا يساوي صفراً. ثم يتم بعد ذلك تقدير معلمات النموذج، تقدير التباين والتباين المشترك والانحراف المعياري لها للوصول إلى اختبار معاملات النموذج.

## 2.4 النموذج الخطـــي المتعـــدد:

يســـتند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تـــابع $Y_i$ وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_k$، وحد عشوائي $U_i$، ويُعبّر عـــن هذه العلاقة، بالنسبة لـــ n من المشاهدات و k من المتغيرات المستقلة، بالشكل الآتي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{i1} + B_2 X_{i2} + \ldots + B_k X_{ik} + U_i \qquad \ldots(1.4)$$

وفي واقع الأمر فان هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{aligned} Y_1 &= B_0 + B_1 X_{11} + B_2 X_{12} + \ldots + B_k X_{1k} + U_1 \\ Y_2 &= B_0 + B_1 X_{21} + B_2 X_{22} + \ldots + B_k X_{2k} + U_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= B_0 + B_1 X_{n1} + B_2 X_{n2} + \ldots + B_k X_{nk} + U_n \end{aligned}$$

هذه المعادلة تتضمن (k+1) من المعلمات المطلوب تقديرها علماً بان الحد الأول منها ($B_0$) يمثل الحد الثابت، الأمر الذي يتطلب اللجوء الى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات. عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات وكالآتي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \qquad \ldots(2.4)$$

وباختصار

$$Y = XB + U \qquad \ldots(3.4)$$

حيث أن:

$Y$: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع.

$X$: مصفوفة أبعادها $(n \times k+1)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت.

$B$: متجه عمودي أبعاده $(k+1 \times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها.

$U$: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية.

وبما إن المعادلة (3.4) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصاءات المتوفرة عن المتغير التابع، $Y$، والمتغيرات المستقلة، $X_1, X_2, \ldots, X_k$، فانه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة بـ $U_i$ التالية:

$$U_i \sim N(0, \sigma^2 In)$$

والذي يعني ان $U_i$ يتوزع توزيعاً طبيعياً (N) متعدد المتغيرات لمتجه وسطه صفري (0) ومصفوفة تباين وتباين مشترك عددية هي $(\sigma^2 In)$.

## 3.4 فرضيات النموذج الخطي المتعدد:

عند استخدام طريقة OLS في تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد، فأنه يجب توافر الافتراضات الآتية:

1- القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفراً أي إن، $E(U_i) = 0$:

$$E(U_i) = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ \vdots \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

2- تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفراً، أي ان:

$$Cov(U) = E(UU') = \sigma^2 In$$

$$E(UU') = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \cdots U_n \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} U_1^2 & U_1U_2 & \cdots\cdots & U_1U_n \\ U_2U_1 & U_2^2 & \cdots\cdots & U_2U_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_nU_1 & U_nU_2 & \cdots\cdots & U_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1U_2) & \cdots\cdots & E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2^2) & \cdots\cdots & E(U_2U_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(U_nU_1) & E(U_nU_2) & \cdots\cdots & E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} Var(U_1) & Cov(U_1U_2) & \cdots\cdots & Cov(U_1U_n) \\ Cov(U_2U_1) & Var(U_2) & \cdots\cdots & Cov(U_2U_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(U_nU_1) & Cov(U_nU_2) & \cdots\cdots & Var(U_n) \end{bmatrix}
$$

$$
\because var(U_i) = E(U_i^2) = \sigma^2
$$

وان:

$$
Cov(U_iU_j) = E(U_iU_j) = 0 \quad ، \qquad i \neq j
$$

$$
E(UU') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots\cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}
$$

حيث أن: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = .... = \sigma_n^2$

$$
= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \sigma^2 In
$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك Variance- Covariance Matrix لحد الخطأ U، حيث تشكل العناصر القطرية في

المصـــفوفة، تبايـــن قـــيم U بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم $U_i$.

3- لـــيس هـــناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة كما وان عدد المشاهدات يجب ان يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها، أي ان:

$$r(x) = k + 1 < n$$

حيث إن (r) رتبة مصفوفة البيانات، (X) تساوي عدد المتغيرات المستقلة (k) زائداً (1) الحد الثابت، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n). وهذه الفرضية ضرورية جداً لضـــمان إيجـــاد معكـــوس المصـــفوفة ($x'x$)، إذ إن انتفاء هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من (k+1)، وبالتالي فأن رتبةِ ($x'x$) التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها اقل من (k+1) ولا يمكن إيجاد معكوسها بسبب ما يسمى بمشـــكلة الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية، OLS.

## 4.4 طرق تقدير معلمات النموذج:

فـــي ضوء الفرضيات المذكورة أعلاه يمكن استخدام طريقة OLS في تقدير معلمـــات الـــنموذج الخطي المتعدد، ولهذا الغرض يمكن إعادة كتابة المعادلة (1.4) بصيغتها التقديرية كالآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{i1} + \hat{B}_2 X_{i2}$$

ولمــــا كــــان هدفــــنا هو الحصول على قيم كل من $\hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ التي تجعل مجموع مربعات الانحرافات اقل مايمكن، أي تصغير القيمة $\sum e_i^2$ (مبدأ المربعات الصغرى) إلى أقل قيمة ممكنة، أي:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$\because e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

ومــــن خــــلال الــــتعويض عــــن $\hat{Y}_i$ بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة الى $\hat{B}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_0$ ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_0} = 2\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-1) = 0$$

$$-2\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (2−) وفك القوس، نحصل:

$$\sum Y_i - n\hat{B}_0 - \hat{B}_1 \sum X_{i1} - \hat{B}_2 \sum X_{i2} = 0$$

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_{i1} + \hat{B}_2 \sum X_{i2} \qquad \ldots(4.4)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i1}) = 0$$

$$-2\sum X_{i1}(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (2-) وفك القوس، نحصل:

$$\sum X_{i1} Y_i - \hat{B}_0 \sum X_{i1} - \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 - \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2} = 0$$

$$\sum X_{i1} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i1} + \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2} \qquad \ldots(5.4)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i2}) = 0$$

$$-2\sum X_{i2}(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (2-) وفك القوس، نحصل:

$$\sum X_{i2} Y_i - \hat{B}_0 \sum X_{i2} - \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} - \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2 = 0$$

$$\sum X_{i2} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i2} + \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2 \qquad \ldots(6.4)$$

وتمثل المعادلات (4.4)، (5.4) و (6.4) المعادلات الطبيعية الثلاث التي تستخدم في تقديــر المعالم الثلاثة المجهولة $\hat{B}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_0$. أن هذه المعادلات، يمكن حلها بإحدى الطرق الآتية:

### 1.4.4 طريقـــة المحـــددات:

ويمكـــن ان تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرايمر للحصول على قيم $\hat{B}_k$ من المعلمات وعلى النحو الآتي:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_{i1} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}$$

$$\sum X_{i1} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i1} + \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2}$$

$$\sum X_{i2} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i2} + \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1} Y_i \\ \sum X_{i2} Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن إيجاد المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N_2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_i \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} Y_i \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2} Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{B}_2 = \frac{|N_2|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_i \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}Y_i \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة لـــ $\hat{B}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق:

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1\overline{X}_1 - \hat{B}_2\overline{X}_2$$

**2.4.4 طريقـــــة الانحرافـــــــات:**

ويمكـــن تقدير معاملات الانحدار المتعدد باستخدام أسلوب الانحرافات أو ما يسمى بالمتوسطات، أي انحرافات القيم الأصلية عن وسطها الحسابي وكالآتي:

ولهذا الغرض نأخذ نموذج يحتوي متغيرين مستقلين $X_1$ و $X_2$:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1X_{i1} + \hat{B}_2X_{i2} + e_i$$

وبأخذ المتوسط لهذه المعادلة:

$$\overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1\overline{X}_1 + \hat{B}_2\overline{X}_2 + \overline{e}_i \qquad , \ \overline{e}_i = 0$$

*

$$\hat{Y}_i - \overline{Y} = \hat{B}_1(X_{i1} - \overline{X}_1) + \hat{B}_2(X_{i2} - \overline{X}_2) + e_i$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_{i1} + \hat{B}_2 x_{i2} + e_i$$

or

---

* إثبات أن $\overline{\hat{Y}} = \overline{Y}$ :

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \qquad \ldots(1)$$

وبـــــإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة أعلاه، نحصل على:

$$\sum \hat{Y}_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

وبالقســــمة على n:

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \hat{B}_0 \frac{n}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{\hat{Y}}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}_i \qquad \ldots(2)$$

$$\because \hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}_i \qquad \ldots(3)$$

$$\therefore \overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}_1 \qquad \ldots(4)$$

وبطرح المعادلة (4) من المعادلة (2) نحصل:

$$\overline{\hat{Y}}_i - \overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \overline{X}_i$$

وبعد الاختصار في الطرف الأيمن، نحصل:

$$\overline{\hat{Y}}_i - \overline{Y} = 0$$

ومنها يكون:

$$\therefore \overline{\hat{Y}}_i = \overline{Y}$$

$$y_i = \hat{B}_1 x_{i1} + \hat{B}_2 x_{i2} + e_i \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n) \quad ...(7.4)$$

وفي واقع الأمر فأن المعادلة أعلاه هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها n معادلة تكون نظام المعادلات التالي:

$$\begin{aligned}
y_1 &= B_1 x_{11} + B_2 x_{12} + .......... + B_k x_{1k} + e_1 \\
y_2 &= B_1 x_{21} + B_2 x_{22} + .......... + B_k x_{2k} + e_2 \\
&\vdots \\
y_n &= B_1 x_{n1} + B_2 x_{n2} + .......... + B_k x_{nk} + e_n
\end{aligned}$$

ويمكن التعبير عن المعادلات أعلاه في هيئة مصفوفة وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حيث يمكن التعبير عن ذلك بصيغة المصفوفات:

$$y = x\hat{B} + e$$

حيث أن:

y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على انحرافات قيم المتغير التابع.

x: مصـــفوفة أبعادهــا $(n \times k-1)$ تحتوي على انحرافات قيم المتغيرات المستقلة حيـــث أنهـــا لا تتضـــمن العمود الأول الذي يمثل الحد الثابت. حيث يمكن بذلك استخراج الحد الثابت $\hat{B}_0$ من خارج المصفوفة باستخدام القانون الآتي:

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1\overline{X}_1 - \hat{B}_2\overline{X}_2$$

Or

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - (\hat{B}_1\overline{X}_1 + \hat{B}_2\overline{X}_2)$$

$\hat{B}$ : متجه عمودي أبعاده $(k-1\times 1)$ تحتوي على المعالم المجهولة.

e: متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي على البواقي.

ويمكن التوصل إلى مصفوفة الانحرافات باتباع الخطوات التالية:

بإعادة كتابة المعادلة (7.4) على النحو الآتي:

$$e_i = y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}$$

ولمـــا كانت افضل طريقة للحصول على أصغر قيمة ممكنة للانحرافات تتم بواسطة تربـــيعها وبجعـــل مجموع مربعاتها اصغر ما يمكن. وبـــأخذ المشـــتقة الجزئية لها بالنســـبة لكل من $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ ومســـاواتها بالصفر نحصـــل على:

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2\sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})(-x_{i1}) = 0$$

$$-2\sum x_{i1}(y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}) = 0$$

وبالقســـــمة على (2−) وفك القوس، نحصل على:

$$\Sigma x_{i1}y_i - \hat{B}_1 \Sigma x_{i1}^2 - \hat{B}_2 \Sigma x_{i1}x_{i2} = 0$$

$$\Sigma x_{i1}y_i = \hat{B}_1 \Sigma x_{i1}^2 + \hat{B}_2 \Sigma x_{i1}x_{i2} \qquad \ldots(8.4)$$

$$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \hat{B}_2} = 2\Sigma(y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})(-x_{i2}) = 0$$

$$-2\Sigma x_{i2}(y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}) = 0$$

وبالقســـــمة على (2−) وفك القوس، نحصل:

$$\Sigma x_{i2}y_i - \hat{B}_1 \Sigma x_{i1}x_{i2} - \hat{B}_2 \Sigma x_{i2}^2 = 0$$

$$\Sigma x_{i2}y_i = \hat{B}_1 \Sigma x_{i1}x_{i2} + \hat{B}_2 \Sigma x_{i2}^2 \qquad \ldots(9.4)$$

ويمكن صياغة المعادلتين أعلاه على شكل مصفوفة وكالآتي:

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_{i1}y_i \\ \Sigma x_{i2}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x_{i1}^2 & \Sigma x_{i1}x_{i2} \\ \Sigma x_{i1}x_{i2} & \Sigma x_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن أعاده كتابته بالشكل التالي:

$$x'y = (x'x)\hat{B}$$

وعليـــه فـــأن تقديـــر المعـــالم باســـــتخدام المصفوفة بأســـلوب الانحرافات يأخذ الصيغـــة التاليـــــة:

$$\hat{B} = (x'x)^{-1} x'y$$

وبعـــد احتساب المتجه $x'y$ ومحدد المصفوفة $|x'x|$ الذي ينبغي ان لا يساوي صفراً نوجـــد مقلوب المصفوفة الذي هو عبارة عن $(x'x)^{-1} = \dfrac{adj(x'x)}{|x'x|}$ ومن ثم تطبيق القانون أعلاه. أما $\hat{B}_0$ فيمكن حسابه بموجب القانون الآتي:

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}_1 - \hat{B}_2 \overline{X}_2$$

هذا ويمكن اســـتخراج القيم بالانحرافـــات دون الرجوع الى البيـــانات الأصلية وكما مبين أدنـــــاه:

$$\Sigma y_i^2 = \Sigma Y_i^2 - \frac{(\Sigma Y_i)^2}{n}$$

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma X_1^2 - \frac{(\Sigma X_1)^2}{n}$$

$$\Sigma x_2^2 = \Sigma X_2^2 - \frac{(\Sigma X_2)^2}{n}$$

$$\Sigma x_1 y = \Sigma X_1 Y - \frac{(\Sigma X_1)(\Sigma Y)}{n}$$

$$\Sigma x_2 y = \Sigma X_2 Y - \frac{(\Sigma X_2)(\Sigma Y)}{n}$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n}$$

وبعـــد اســـتخدام الحاسوب، فقد اصبح من السهل على الباحث الاقتصادي ان يحصل على النتائج من خلال أجادته استخدام إحدى البرامجيات الإحصائية أمثال EXCEL، SPSS، STATS، ولا يحتاج إلى استخدام الصيغ أعلاه في الجوانب التطبيقية، ولكن تم عرضها هنا لمعرفة كيفية عمل الانحدار المتعدد.

**مثـــــال 1.4:** الجـــدول الآتـــي يتضمن البيانات الخاصة بالاستيرادات كمتغير تابع (Y) والدخل القومي كمتغير مستقل أول ($X_1$) وأسعار الاستيرادات كمتغير مســـتقل ثاني ($X_2$) في أحد الدول للمدة 1985-1993 والمطلوب هو تقدير معالم العلاقة أعلاه:

| السنة | الاستيرادات Y | الدخل القومي $X_1$ | السعر $X_2$ | $X_1Y$ | $X_2Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1985 | 100 | 100 | 100 | 10000 | 10000 |
| 1986 | 106 | 104 | 99 | 11024 | 10494 |
| 1987 | 107 | 106 | 110 | 11342 | 11770 |
| 1988 | 120 | 111 | 126 | 13320 | 15120 |
| 1989 | 110 | 111 | 113 | 12210 | 12430 |
| 1990 | 116 | 115 | 103 | 13340 | 11948 |
| 1991 | 124 | 120 | 102 | 14880 | 12648 |
| 1992 | 133 | 124 | 103 | 16492 | 13699 |
| 1993 | 137 | 126 | 98 | 17262 | 13426 |
| n = 9 | $\sum Y =$ 1053 | $\sum X_1 =$ 1017 | $\sum X_2 =$ 954 | $\sum X_1Y =$ 119870 | $\sum X_2Y =$ 111535 |

الحل:

| $X_1X_2$ | $X_1^2$ | $X_2^2$ | $Y^2$ |
|---|---|---|---|
| 10000 | 10000 | 10000 | 10000 |
| 10296 | 10816 | 9801 | 11236 |
| 11660 | 11236 | 12100 | 11449 |
| 13986 | 12321 | 15876 | 14400 |
| 12543 | 12321 | 12769 | 12100 |
| 11845 | 13225 | 10609 | 13456 |
| 12240 | 14400 | 10404 | 15376 |
| 12772 | 15376 | 10609 | 17689 |
| 12348 | 15876 | 9604 | 18769 |
| $\sum X_1X_2 =$ 107690 | $\sum X_1^2 =$ 115571 | $\sum X_2^2 =$ 101772 | $\sum Y^2 =$ 124475 |

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$= 119870 - \frac{(1017)(1053)}{9}$$

$$= 119870 - 118989$$

$$= 881$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

$$= 111535 - \frac{(954)(1053)}{9}$$

$$= 111535 - 111618$$

$$= -83$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n}$$

$$= 107690 - \frac{(1017)(954)}{9}$$

$$= 107690 - 107802$$

$$= -112$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}$$

$$= 115571 - \frac{(1017)^2}{9}$$

$$= 115571 - 114921$$

$$= 650$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n}$$

$$= 101772 - \frac{(954)^2}{9}$$

$$= 101772 - 101124$$

$$= 648$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}$$

$$= 124475 - \frac{(1053)^2}{9}$$

$$= 124475 - 123201$$

$$= 1274$$

$$\hat{B} = (x'x)^{-1} x'y$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{|x'x|} \text{ adj } (x'x)$$

$$|x'x| = \begin{vmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 650 & -112 \\ -112 & 648 \end{vmatrix}$$

$$= (650)(648) - (-112)(-112)$$

$$= 421200 - 12544$$

$$= 408656$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{408656}\begin{bmatrix} 648 & 112 \\ 112 & 650 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069 \\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix}$$

$$(x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = (x'x)^{-1} x'y$$

$$= \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069 \\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.396988485 & +(-0.022747727) \\ 0.241454789 & +(-0.132018057) \end{bmatrix}$$

لذلك ســـــيكون:

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.374240758 \\ 0.109436732 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}_1 - \hat{B}_2 \overline{X}_2$$
$$= 117 - (1.374240758)\,(113) - (0.109436732)\,(106)$$

$$= 117 - 155.2892057 - 11.60029359$$

$$= -49.88949929$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2$$

$$\hat{Y} = -49.88949929 + 1.374240758 X_1 + 0.109436732 X_2$$

وتشـــير المعادلـــة التقديرية أعلاه إلى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع Y الذي يمـــثل الاستيرادات والمتغير المستقل $X_1$ الذي يمثل الدخل القومي فكل زيادة في $X_1$ بمقدار وحدة واحدة تزداد Y بمقدار (1.374) وحدة مع ثبات أثر $X_2$. كما تشير هذه المعادلـــة إلى وجود علاقة طردية بين الاستيرادات والمتغير المستقل $X_2$ الذي يمثل السعر، فبزيادة $X_2$ بمقدار وحدة واحدة تزداد الاستيرادات بمقدار (0.109) وحدة مع ثـــبات أثـــر $X_1$ وهذا مخالف لمنطق النظرية الاقتصادية إذ تشير النظرية الى وجود علاقة عكسية بين السعر والاستيرادات.

## 5.4 التباين والخطأ المعياري لمقدرات OLS:

مصفوفة التباين والتباين المشترك لمقدرات نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

فـــي حـــالـــة K مـــن المتغـــيرات المســـتقلة فان التبـــاين إلى $B_k$ يـــمكن الحصول عليه كمـــــا يلـــي:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\because Y = XB + U$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه، نحصل:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'(XB + U)$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كما يلي:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'XB + (X'X)^{-1}X'U$$

ولما كانت:

$$(X'X)^{-1}X'X = 1$$

فأن:

$$\hat{B} = B + (X'X)^{-1}X'U$$

وبأخذ التوقع لطرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}) = B + E\,[(X'X)^{-1}X'U]$$

$$= B + (X'X)^{-1}X'\,E(U)$$

$$\because E(U) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}) = B$$

إذن $\hat{B}$ هـــي عـــبارة عن مقدار غير متحيز الى $B$ الحقيقية. ويمكن الحصول على تبـــايـــن قيمـــة المعـــلمة المقدرة $\hat{B}$ حيث يؤدي ذلك الى مصفوفة التبـــاين والتباين المشترك الخاصة بالمتجه $\hat{B}$:

$$\hat{B} - E\,(\hat{B}) = \hat{B} - B = (X'X)^{-1}X'U$$

$$\text{var}\,(\hat{B}) = E\left\{[\hat{B} - E(\hat{B})]\,[\hat{B} - E(\hat{B})]'\right\}$$

$$\because E(\hat{B}) = B$$

$$\text{var}\,(\hat{B}) = E\left\{(\hat{B} - B)\,(\hat{B} - B)'\right\}$$

$$= E\left\{[(X'X)^{-1}X'U]\,[(X'X)^{-1}X'U]'\right\}$$

$$= E\left\{(X'X)^{-1}X'UU'X(X'X)^{-1}\right\}$$

$$= (X'X)^{-1}X'\,E(U'U)\,X(X'X)^{-1}$$

ولما كانت:

$$E(UU') = \sigma^2 In$$

$$var(\hat{B}) = (X'X)^{-1}X'\,.\,\sigma^2 In\,.\,X(X'X)^{-1}$$

وبإعادة الترتيب، نحصل:

$$var(\hat{B}) = \sigma^2 In\,(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$$

$\because (X'X)^{-1}X'X = I$ مصفوفة الوحدة

$$\therefore var(\hat{B}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

هــذا يعني أن قيمة تباين أي عنصر من عناصر المتجة $(\hat{B})$ هو عبارة عن حاصل ضــرب قــيمة $\sigma^2$ بمــا يقابلهــا من العناصر الواقعة على القطر الرئيسي لمقلوب المصــفوفة $(X'X)^{-1}$. أمــا التباين المشترك بين أي أثنين من عناصر المتجة $(\hat{B})$ فهو عبارة عن حاصل ضرب $\sigma^2$ بالعنصر المقابل لها والواقع خارج القطر الرئيسي لمقلــوب المصــفوفة $(X'X)^{-1}$. ويمكن تــوضيح ذلك لــنموذج الانحــدار الخطي المتعدد الذي يحتــوي على متغيريــن مســـتقلين، وكمــا يلي:

$$var(\hat{B}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \begin{bmatrix} \sum X^2 & -\sum X \\ -\sum X & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma^2 \sum X^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} & \dfrac{-\sigma^2 \sum X}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \\ \\ \dfrac{-\sigma^2 \sum X}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} & \dfrac{n\sigma^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2} \right]$$

$$\text{var}(\hat{B}_1) = \frac{n\ \sigma^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$$

$$\text{Cov}(\hat{B}_0, \hat{B}_1) = \frac{-\sigma^2 \sum X}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{-\sigma^2 \overline{X}}{\sum x^2}$$

أمـــا الصيغة التقديرية لتبـــاين الخطـــأ العشـــــوائي، $\sigma^2$، ($S^2e$) فيمكن الوصول أليها كالآتي:

$$S^2e = \frac{e'e}{n-k-1} \qquad \dots(10.4)$$

$$e'e = (Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y})$$

$$\because \hat{Y} = X\hat{B}$$

$$e'e = (Y-X\hat{B})'(Y-X\hat{B})$$

$$= Y'Y - Y'X\hat{B} - \hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B} \qquad \dots(11.4)$$

وبمـــا أن الحديــن الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة، كما وأن كلاً منهما يمثل مبدلة الآخر، فان:

$$Y'X\hat{B} = (Y'X\hat{B})' = YX'\hat{B}'$$

عليه يمكن إعادة كتابة المعادلة (11.4) بالشكل التالي:

$$e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B} \qquad \dots(12.4)$$

$$\because \hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\therefore (X'X)\hat{B} = X'Y$$

$$e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'Y \qquad \dots(13.4)$$

$$e'e = Y'Y - \hat{B}'X'Y \qquad \dots(14.4)$$

وبتعويض هذه القيمة في البسط من المعادلة (10.4) نحصل:

$$S^2e = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n - k - 1}$$

## 6.4 اختبار فرضيات النموذج الخطي المتعدد:

يهدف هذا المبحث إلى توسيع معارفنا الأساسية لنموذج الانحدار وذلك بأجراء اختبار معنوية الانحدار المتعدد والمقدر باستخدام توزيع اختبار إحصاءه F ومقارنته باختبار t ومن ثم تقييم كفاءة الأداء العام لنموذج الانحدار المتعدد $R^2$ ومقارنته بمعامل التحديد المقدر المعدل $\overline{R}^2$، وكذلك اختبار العلاقة بين F و $R^2$ من خلال جدول تحليل التباين، ANOVA، ثم علاقة $R^2$ بقيمة المتغير العشوائي، $\sum e_i^2$.

### 1.6.4 اختبار معنوية المعالم (t):

يستخدم اختبار (t) لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $x_1, x_2, ..., x_k$ في المتغير التابع y في نموذج الانحدار المتعدد، وكما ذكرنا سابقاً عند تناول اختبار (t) في نموذج الانحدار الخطي البسيط، انه يعتمد على نوعين من الفروض:

فرضية العدم $H_0 : B_1 = B_2 = B_3 = .... = B_k = 0$

الفرضية البديلة $H_1 : B_1 \neq B_2 \neq B_3 \neq .... \neq B_k = 0$

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول او رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار يُمكن بيانها كما يلي:

**أ- بالنسبة الى** $\hat{B}_1$:

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}}$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_1}}$$

$$S^2_{\hat{B}_1} = var(\hat{B}_1) = S^2e \ a_{11}$$

$$var(\hat{B}) = S^2e(x'x)^{-1}$$

$$S^2e = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n-k-1} = \frac{\sum y^2 - (\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y)}{n-k-1}$$

ب- بالنسبة الى $\hat{B}_2$:

$$t_{\hat{B}_2} = \frac{\hat{B}_2}{S_{\hat{B}_2}}$$

$$S_{\hat{B}_2} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_2}}$$

$$S^2_{\hat{B}_2} = var(\hat{B}_2) = S^2e \quad a_{22}$$

$$S^2e = \frac{e'e}{n-k-1}$$

وبالرجـــوع إلى المثال 1.4، يمكن تقييم معنوية المعلمات $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_2$ وكالآتي:

أ- بالنسبة الى $\hat{B}_1$:

$$S^2e_i = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n-k-1} = \frac{\sum y^2 - (\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y)}{n-k-1}$$

$$= \frac{1274 - (1.374240758)(881) - (0.109436732)(-83)}{9 - 2 - 1}$$

$$= \frac{1274 - 1210.706108 + 9.083248756}{6}$$

$$= \frac{72.37714076}{6} = 12.06285679$$

$$\text{var} - \text{cov}(\hat{B}) = S^2 e_i (x'x)^{-1}$$

$$= 12.06285679 \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069 \\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.019127891 & 0.003306055 \\ 0.003306055 & 0.019186926 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_1) \text{ or } S^2_{\hat{B}_1} = 0.019127891$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_1}} = \sqrt{0.019127891} = 0.138303618$$

$$t_{\hat{B}_2} = \frac{\hat{B}_1}{S^2_{\hat{B}_1}} = \frac{1.374240758}{0.138303618} = 9.936404975$$

وبما إن قيمة $(t_{\hat{B}_1})$ المحتسبة والبالغة (9.93) اكبر من مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45) ، عليه ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، أي ان $\hat{B}_1$ معنوي.

**ب- بالنسبة الى $\hat{B}_2$:**

$$S^2 e = 12.06285679$$

$$\text{var}(\hat{B}_2) \text{ or } S^2_{\hat{B}_2} = 0.019186926$$

$$S_{\hat{B}_2} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_2}} = \sqrt{0.019186926} = 0.138516879$$

$$t_{\hat{B}_2} = \frac{\hat{B}_2}{S_{\hat{B}_2}} = \frac{0.109436732}{0.138516879} = 0.790060625$$

وبما إن قيمة $(t_{\hat{B}_2})$ المحتسبة والبالغة (0.79) اقل من مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45)، عليه تقبل فرضية العدم، أي عدم معنوية المعلمة المقدرة $(\hat{B}_2)$.

### 2.6.4 معامل التحديد المتعدد، Multiple Coefficient of Determination ($R^2$):

ويعـــد مؤشـــر اســـاس في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغـــيرات المستقلة $(X_k)$، إذ (k=1, 2, ..., k) ، بعبارة اخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع. ويمكن اشتقاقه باستخدام المصفوفات بالانحرافات كالآتي:

$$\because y = x\hat{B} + e$$

$$e = y - x\hat{B}$$

$$e'e = (y - x\hat{B})' (y - x\hat{B})$$

$$e'e = y'y - y'x\hat{B} - x'\hat{B}'y + \hat{B}'x'x\hat{B}$$

وبما ان الحدين الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة كما وان كلاً منها يمثل مبدلاً للآخر فان:

$$\therefore e'e = y'y - 2\hat{B}'x'y + \hat{B}'x'x\hat{B}$$

$$\because \hat{B} = (x'x)^{-1} x'y$$

$$(x'x)\hat{B} = x'y$$

$$e'e = y'y - 2\hat{B}'x'y + \hat{B}'x'y$$

$$e'e = y'y - \hat{B}'x'y$$

بذلك يمكن كتابة معادلة الانحرافات الكلية كالآتي:

$$y'y = \hat{B}'x'y - e'e$$

إذ ان:

$y'y$ : تمثل الانحرافات الكلية.

$\hat{B}'x'y$ : تمثل الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار.

$e'e$ : تمثل الانحرافات غير الموضحة.

وبمـــا ان معـــامل الـــتحديد $R^2$ عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار الى الانحرافات الكلية، Total variation، فانه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية:

$$\therefore R^2 = \frac{\hat{B}'x'y}{y'y} = \frac{\hat{B}'x'y}{\sum y^2}$$

or

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{y'y - n\overline{Y}^2}$$

or

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}$$

إن إضـــافة متغيرات مستقلة جديدة الى المعادلة يؤدي الى رفع قيمة $R^2$، وذلك لثبات قـــيمـــــة المقـــام وتغـــير قـــيمة البسط بمقدار $(\hat{B}xy)$ غير إن الاستمرار بإضافة المتغـــيرات المســـتقلة ســـيؤدي الى انخفاض درجات الحرية (n-k-1)، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل او المصحح $R^2$ وعلى النحو الآتي:

$$\overline{R}^2 = 1 - \left[(1 - R^2)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

وبالـــرجوع إلى المثال 1.4، يمكن معرفة نسبة مساهمة $X_1$ و $X_2$ في التغير الحاصل في Y وكالآتي:

$$R^2 = \frac{\hat{B}'x'y}{\sum y^2} = \frac{[1.374240758 \quad 0.109436732]\begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}}{1274}$$

$$= \frac{1210.706108 - 9.083248756}{1274}$$

$$= \frac{1201.622859}{1274} = 0.943189057 = \%94.3$$

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}$$

$$= \frac{(1.374240758)(881) + (0.109436732)(-83)}{1274}$$

$$= \frac{1210.706108 - 9.083248756}{1274}$$

$$= \frac{1201.622859}{1274} = 0.943189057 = \%94.3$$

أما معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[(1 - R^2)\frac{n-1}{n-k-2}\right]$$

$$=1-\left[(1-0.943189057)\frac{9-1}{9-2-1}\right]$$

$$=1-[(0.056810943)(1.333333333)]$$

$$=1-0.075747924=0.924252076=\%92.4$$

هـذا يعنـي ان المتغيريـن المستقلين $X_1$ و$X_2$ يفسران حوالي 92.4% من التغير الحاصـل فـي المتغير التابع Y وان النسبة الباقية والبالغة حوالي 7.6% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

**3.6.4 اختبار إحصائية F، F-Statistics:**

يستـهدف هـذا الاختـبار معرفة مدى معنوية العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_k$ على المتغير التابع Y، وكما هو الحال في الانحدار البسيط فانه يعتمد على نوعين من الفروض:

**فرضـية العدم $H_0$:** وتنص على انعدام العلاقة بين كل متغير من المتغيرات المستقلة $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ وبين المتغير التابع Y، أي:

$$H_0: \hat{B}_1=\hat{B}_2=\ldots=\hat{B}_k=0$$

**الفرضـية الـبديلة $H_1$:** وتـنص على وجود علاقة معنوية بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع، أي:

$$H_1: \hat{B}_1\neq\hat{B}_2\neq\ldots\neq\hat{B}_k\neq 0$$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

$$F=\frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$$

or

$$F=\frac{R^2/k}{1-R^2/n-k-1}$$

وبعـــد احتساب قيمة F تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (k) و(n-k-1) للبسط والمقـــام ولمستوى معنوية معين. فإذا كانت القيمة المحتسبة اكبر من القيمة الجدولية تـــرفض $H_0$ وتقـــبل $H_1$ أي ان العلاقة المدروسة معنوية، وهناك على الاقل متغير مستقل واحد من المتغيرات $X_k$ ذو تأثير في Y. اما اذا كانت القيمة المحتسبة اصغر من الجدولية فان ذلك يعني قبول $H_0$ أي ان العلاقة الخطية المدروسة غير معنوية أي انه ليس ثمة تأثير من أي متغير من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.

وبالرجوع إلى بيانات مثالنا 1.4 يمكن اختبار معنوية العلاقة المقدرة وكالآتي:

$$F=\frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$$

$$=\frac{1201.622859/2}{72.37714076/9-2-1}$$

$$= \frac{600.8114295}{12.06285679} = 49.8067282$$

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n - k - 1}$$

$$= \frac{0.943189057 / 2}{1 - 0.943189057 / 6} = \frac{0.471594528}{0.00946849} = 49.8067$$

وبما ان قيمة (F) المحتسبة والبالغة (49.8) اكبر من قيمة (F) الجدولية عند مستوى معـــنوية (5%) ودرجـــة حرية (2، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.14)، عليه ترفض فرضـــية العـــدم التي تنص على عدم معنوية العلاقة الخطية المقدرة وتقبل الفرضية الـــبديلة التـــي تنص على معنوية العلاقة المقدرة. بعبارة أخرى، ان هناك على الأقل تأثير لأحد المتغيرين $X_1$، $X_2$ على المتغير التابع Y .

## 7.4 تحليل جدول التباين، ANOVA:

لغـــرض الوقوف على تأثير كل من $X_1$، $X_2$ في المتغير التابع Y، لابد من عمل جدول تحليل التباين لبيان أثر المتغيرين المستقلين $X_1$، $X_2$ في النموذج.

جـــدول تحليـــل التبايـــن

| مصدر التباين | مجموع مربعات الخطأ | درجات الحرية | متوسط مربعات الخطأ | اختبار F |
|---|---|---|---|---|
| الانحراف الموضح من قبل $X_1$ و $X_2$ | $\hat{B}'x'y$<br>**1201.622859** | **K**<br>**2** | $\hat{B}'x'y/k$<br>**600.8114295** | $F = \frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$<br>$= \frac{600.8114295}{12.06285679}$<br>**= 49.8067** |
| الانحراف غير الموضح | $e'e$<br>**72.37714076** | **n-k-1**<br>**6** | $e'e/n-k-1$<br>**12.06285679** | |
| الانحراف الكلي | $y'y$<br>**1274** | **n−k**<br>**8** | | |

ولمعرفة تأثير كل متغير مستقل في المتغير التابع بصورة منفردة فإننا نختبر خـــلال المرحلة الاولى تأثير المتغير $X_1$ بصورة مستقلة في Y. وفي المرحلة الثانية نختبر تأثير المتغير $X_2$ بصورة مستقلة في Y. وبالرجوع إلى مثالنا نختبر ما يلي:

### أولاً: تأثير عنصر الدخل $X_1$ في الاستيرادات Y:

لغرض اختبار التأثير المستقل لعنصر الدخل $(X_1)$ في دالة الاستيرادات $(Y)$ يجـــب معرفة مقدار الزيادة المتحققة في قيمة مجموع مربعات الانحرافات الموضحة

مـــن قبل خط انحدار المتغير التابع Y على المتغير المستقل $X_2$ نتيجة اضافة المتغير $X_1$ الى الدالة، ويتم ذلك بافتراض نموذج يتضمن المتغير $X_2$ أي ان:

$$Y_i = B_0 + B_2X_2 + U_i$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_2X_2$$

$$\hat{B}_2 = \frac{\sum x_2y}{\sum x_2^2} = \frac{-83}{648} = -0.128086419$$

أما مجموع مربعات الانحرافات الناجمة عن المتغير $X_2$ فهي:

$$\hat{B}_2 \sum x_2y = (-0.128086419)(-83)$$
$$= 10.63117284$$

أما التأثير الذي يضيفه المتغير المستقل $X_1$ الى الدالة فهو:

$$\hat{B}_1 \sum x_1y = \hat{B}'X'y - \hat{B}_2 \sum x_2y$$
$$= 1201.622859 - 10.63117284$$
$$= 1190.991686$$

ولاختـــبار مدى معنوية هذا التأثير المضاف من قبل المتغير المستقل $X_1$ ننظم جدول تحليل التباين الآتي:

**تحليل التأثير المستقل للمتغير المستقل $X_1$ في النموذج**

| مصدر التباين | مجموع مربعات الخطأ | درجات الحرية | متوسط مربعات الخطأ | اختبار F |
|---|---|---|---|---|
| الانحراف الموضح من قبل $X_2$ | 10.63117284 | 1 | | |
| الانحراف الموضح من قبل $X_1$ | 1190.991686 | 1 | 1190.991686 | $F_1 = \frac{1190.991686}{12.06285679}$ |
| الانحراف الموضح من قبل $X_1$ و $X_2$ | 1201.622859 | 2 | | = 98.73214171 |
| الانحرافات غير الموضحة | 72.37714076 | 6 | 12.06285679 | |
| الانحرافات الكلية | 1274 | 8 | | |

وبمقارنـــة قـــيمة ($F_1$) المحتسبة والبالغة (98.73) مع مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (2، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.14) والتي يتضح أنها اكـــبر من الجدولية، عليه ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، مما يدل على وجود تأثير معنوي للمتغير المستقل $X_1$ الذي يمثل الدخل القومي على المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات.

**ثانياً: تأثير عنصر السعر $X_2$ في الاستيرادات Y:**

لبـــيان أثـــر المتغـــير المستقل $X_2$ في الدالة نفترض نموذجاً يتضمن المتغير المستقل $X_1$، أي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + U_i$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_1 y}{\sum x_1^2} = \frac{881}{650} = 1.355384615$$

أما مجموع مربعات الانحرافات الناجمة عن المتغير $X_1$ فهي:

$$\hat{B}_1 \sum x_1 y = (1.355384615)(881)$$

$$= 1194.093846$$

أما التأثير الذي يضيفه المتغير المستقل $X_2$ الى الدالة فهو:

$$\hat{B}_2 \sum x_2 y = \hat{B}'x'y - \hat{B}_1 \sum x_1 y$$

$$= 1201.622859 - 1194.093846$$

$$= 7.529013$$

ولاختبار مدى معنوية هذا التأثير المضاف من قبل المتغير المستقل $X_2$ ننظم جدول تحليل التباين الآتي:

**تحليل التأثير المستقل للمتغير المستقل $X_2$ في النموذج**

| مصدر التباين | مجموع مربعات الخطأ | درجات الحرية | متوسط مربعات الخطأ | اختبار F |
|---|---|---|---|---|
| الانحراف الموضح من قبل $X_1$ | **1194.093846** | **1** | | |
| الانحراف الموضح من قبل $X_2$ | **7.529013** | **1** | **7.529013** | $F_2 = \frac{7.529013}{12.06285679}$ **= 0.624148419** |
| الانحرافات الموضحة من قبل $X_1$ و$X_2$ | **1201.622859** | **2** | | |
| الانحرافات غير الموضحة | **72.37714076** | **6** | **12.06285679** | |
| الانحرافات الكلية | **1274** | **8** | | |

وبمقارنـــة قـــيمة ($F_2$) المحتســـبة والبالغة (0.62) مع مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (2، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.14) والتي يتضح بأنها اقل من الجدولية، عليه نقبل فرضية العدم، مما يدل بان المتغير المستقل $X_2$ لايمارس تأثيراً معنوياً على المتغير التابع Y.

وعليه نستنتج بأن المتغير المستقل $X_1$ الذي يمثل الدخل القومي يمارس تأثيراً معـــنوياً على المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات. في حين ان المتغير المستقل $X_2$ الـــذي يمـــثل الســـعر لايمارس تأثيراً معنوياً على Y ومن ثم يجب استبعاده من النموذج المدروس واعتماد النموذج الذي يحتوي على المتغير $X_1$ ذو التأثير المعنوي في المتغير Y والذي ندرجه ادناه:

$$Y_i = B_0 + B_1X_1 + U_i$$

حيـــث يـــتم تقديره وتقييمه على غرار النموذج الوارد في الفصل الخاص بالانحدار الخطي البسيط وكما يلي:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_1 y}{\sum x_1^2} = \frac{881}{650} = 1.355384615$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}$$
$$= 117 - (1.355384615)(113)$$
$$= 117 - 153.1584615$$
$$= -36.1584615$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$
$$\hat{Y} = -36.1584615 + 1.355384615\, X_i$$

وتعنـــي بان زيادة المتغير المستقل X والذي يمثل الدخل القومي بمقدار وحدة واحدة تسبب زيادة في المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات بمقدار (1.355) وحدة.

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_1 y}{\sum y^2} = \frac{(1.355384615)(881)}{1274}$$

$$= \frac{1194.093846}{1274} = 0.937279313 = \%93.72$$

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n - k - 1} = \frac{0.937279313 / 1}{1 - 0.937279313 / 9 - 1 - 1}$$

$$= \frac{0.937279313}{0.008960098} = 104.6059221$$

ولاختبار معنوية المعلمات $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_0$ نحتاج البيانات الآتية:

| Y | $\hat{Y}$ | $e_i$ | $e_i^2$ |
|---|---|---|---|
| **100** | **99.38** | **0.62** | **0.3844** |
| **106** | **104.8015385** | **1.1984615** | **1.436309967** |
| **107** | **107.5123077** | **-0.5123077** | **0.262459179** |
| **120** | **114.2892308** | **5.7107692** | **32.61288486** |
| **110** | **114.2892308** | **-4.2892308** | **18.39750086** |
| **116** | **119.7107692** | **-3.7107692** | **13.76980806** |
| **124** | **126.4876923** | **-2.4876923** | **6.188612979** |
| **133** | **131.9092308** | **1.0907692** | **1.18977448** |
| **137** | **134.62** | **2.38** | **5.6644** |
| $\sum Y = 1053$ | $\sum \hat{Y} = 1053$ | $\sum e_i = 0$ | **79.90615335** |

**بالنسبة لـ $\hat{B}_1$:**

$$S^2 e_i = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{79.90615335}{9-2} = 11.41516476$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S^2 e_i}{\sum x_i^2} = \frac{11.41516476}{650} = 0.017561791$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.017561791} = 0.132520911$$

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} = \frac{1.355384615}{0.132520911} = 10.22770372$$

بالنسبة لـ $\hat{B}_0$:

$$S^2e = 11.41516476$$

$$S^2_{\hat{B}_0} = S^2 e_i \left[ \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$= 11.41516476 \left[ \frac{1}{9} + \frac{(113)^2}{650} \right]$$

$$= 11.41516476 [0.111111111 + 19.64461538]$$

$$= 225.5148729$$

$$S_{\hat{B}_0} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_0}} = \sqrt{225.5148729} = 15.01715262$$

$$t_{\hat{B}_0} = \frac{\hat{B}_0}{S_{\hat{B}_0}} = \frac{-36.1584615}{15.01715262} = -2.407810749$$

وعليه فان الصيغة التقديرية للنموذج المدروس تكون كما يلي:

$$\therefore \hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

$$\hat{Y} = -36.1584615 + 1.355384615X_i$$

$$(2.407) \qquad (10.227)$$

$$R^2 = \%93.72 \qquad F = 104.60$$

## 8.4 قياس حدود الثقـــة:

لاحتساب حدود الثقة لأية مشاهدة (نقطة) من مشاهدات خط الانحدار للمجتمع او بعـــبارة اخرى لحساب القيمة المتوسطة الحقيقية الى Y عند مستوى معنوية معين للمتغير المستقل في النموذج. نفترض بان النقطة المراد تقدير حدود ثقتها هي E(Yo) . ولـــتقدير المجال الذي يمكن ان تقع فيه قيمة E(Yo) المقابلة لتشكيلة معينة من قيم المتغيرات المستقلة (k) يجب اشتقاق متباينة القيمة E(Yo).

$$X_0 = [1 \;\; X_{01} \;\; X_{02} \ldots X_{0k}]$$

$$\hat{Y}_0 = [1 \;\; X_{01} \;\; X_{02} \ldots X_{0k}] \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ . \\ . \\ \hat{B}_k \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{01} + \ldots + \hat{B}_k X_{0k}$$

وباختصار:

$$\hat{Y}_0 = X_0 \hat{B}$$

ولغــرض اشـــتقاق المتباينة الخاصة بتقدير فترات حدود الثقة للقيمة E(Yo) يجب اشتقاق وسط وتباين القيمة $(\hat{Y}_0)$ وكالآتي:

لايجاد الوسط فاننا نأخذ القيمة المتوقعة لــ$(\hat{Y}_0)$:

$$E(\hat{Y}_0) = E(X_0\hat{B})$$
$$E(\hat{Y}_0) = X_0 E(\hat{B})$$
$$\because E(\hat{B}) = B$$
$$\therefore E(\hat{Y}_0) = X_0 B$$

ولإيجاد التباين:

$$var(\hat{Y}_0) = E\{(\hat{Y}_0 - E(\hat{Y}_0)(\hat{Y}_0 - E(\hat{Y}_0)'\}$$

$$= E\{(\hat{Y}_0 - X_0 B)(\hat{Y}_0 - X_0 B)'\}$$

$$\because \hat{Y}_0 = X_0\hat{B}$$

$$\therefore var(\hat{Y}_0) = E\{(X_0\hat{B} - X_0 B)(X_0\hat{B} - X_0 B)'\}$$

$$= X_0\{E(\hat{B} - B)(\hat{B} - B)'\}X_0'$$
$$= \sigma^2 X_0 (X'X)^{-1} X_0'$$

وإذا رمــزنا للقيمة التقديرية لتباين قيمة حدود الثقة $var(\hat{Y}_0)$ بالرمز $S^2(\hat{Y}_0)$، فان:

$$S^2(\hat{Y}_0) = S^2 X_0 (X'X)^{-1} X_0'$$

وعليه فان حدود الثقة للقيمة E(Yo) تكون:

$$E(Y_0) = \hat{Y}_0 \mp t_{\alpha/2}.S(\hat{Y}_0)$$

$$E(Y_0) = X_0\hat{B} \mp t_{\alpha/2}.S(\hat{Y}_0)$$

## الأسئلة والتمـــــارين

**السؤال 1.4**: لدراسة دالة الأنفاق على المواد الغذائية أخذت 6 أسر واعتمد لوغاريتم الأنفـاق علـى المواد الغذائية كمتغير معتمد ($Y_i$) وعلاقته بلوغاريتم سعر المـواد الغذائـية ($X_{1i}$) ولوغاريتم الدخل المتاح ($X_{2i}$) كمتغيرات مستقلة، حيث كانت العمليات الحسابية كالآتي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.15 & -0.07 \\ & 0.32 & -0.45 \\ & & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

قدر معلمات العلاقة بين ($Y_i$) والمتغيرين $X_{1i}$ و $X_{2i}$.

**السؤال 2.4**: ماذا تعني النتائج في المعادلة الآتية:

$$\ln Y_t = 1.24 + 0.25 \ln L_t + 0.78 \ln K_t$$

حيث ان:

$Y_t$: تمثل الإنتاج.

$L_t$: تمثل العمل.

$K_t$: تمثل رأس المال.

**السـؤال 3.4**: أفـرض ان باحـثاً قدر العلاقة بين المتغير المعتمد ($Y_t$) والمتغيرات المستقلة ($X_{1t}$) و ($X_{2t}$) وحصل على النتيجة الآتية:

$$\hat{Y}_t = -49.329 + 1.364\,X_{1t} + 0.114\,X_{2t}$$

وتوفرت المعلومات الآتية:

$$\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \overline{Y})^2 = 1260.89 \quad , \quad R^2 = 0.94 \quad , \quad n = 9$$

حيث ان $Y_t$ تمثل الرقم القياسي للاستيرادات، $X_{1t}$ تمثل الرقم القياسي للإنتاج الإجمالي، $X_{2t}$ تمثل نسبة الرقمين القياسيين أعلاه.

**المطلوب:** ضع جدول تحليل التباين مستعيناً بمعامل التحديد $R^2$ وأختبر الأثر الإجمالي للعلاقة المقدرة مستخدماً $F(6, 2, 0.05) = 5.14$.

**السؤال 4.4:** لتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد للعلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة $(Y)$ وسعر السلعة $(X_1)$ والدخل الفردي $(X_2)$.

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + U$$

وحصلت على الحسابات الآتية:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.2 & 1.8 \\ & 1 & -1.7 \\ & & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad X'Y = \begin{bmatrix} 42 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} \quad , \quad S_u^2 = 10$$

**المطلوب:**

أ- قدر معالم هذه الدالة $(\mathbf{b_0,b_1,b_2})$ مع التفسير الاقتصادي.

ب- احسب مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعلمات الدالة $Var - Cov(\hat{B})$.

جـ- أوجد تباين المعلمة $\hat{b}_2$.

**السؤال 5.4:** لنموذج الانحدار المتعدد الآتي:

$$Y = XB + U$$

$$U \sim N(0, \sigma^2 \ln) \ , \ E(U_i \ \ U_j) = 0 \quad i \neq j$$

اثبت ان موجه المعلمات (b) المقدر بأسلوب (OLS) غير متحيز، أي ان $E(\hat{\mathbf{B}}) = B$.

**السؤال 6.4:** باحث اقتصادي اعتمد الأنفاق على المواد الغذائية $(Y_i)$ كمتغير معتمد وعلاقته بسعر المواد الغذائية $(X_{i1})$ والدخل المتاح $(X_{i2})$ كمتغيرات مستقلة لتقدير دالة الاستهلاك الآتية:

$$\hat{Y}_i = 4.82 - 4.71 X_{i1} + 2.77 X_{i2}$$

مع العمليات الحسابية الآتية:

$$\sum_{i=1}^{6} Y_t = 9 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} x_{i1} y_i = 12 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} x_{i2} y_i = 16 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 42$$

**المطلوب:** اشتق صيغة لتقدير تباين العينة $(S_e^2)$ ثم احسبه من واقع البيانات أعلاه.

**السؤال 7.4:** إذا كان نموذج الانحدار العام هو:

$$Y = XB + U$$

$$U \sim N(0, \sigma^2 \ln) \ , \ E(U_i \ \ U_j) = 0 \quad i \neq j$$

**المطلوب:** اشتق صيغة لتقدير مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجه (b) أي، Var-Cov (b).

**السؤال 8.4:** في عينة تمثل (24) مشاهدة للكميات المطلوبة من سلعة ما (Y) وسعرها $(X_1)$ ودخول المستهلكين $(X_2)$ تم تقدير النموذج الآتي:

$$\hat{Y} = 13 - 7 X_1 + 2.4 X_2$$

**المطلوب:** اختبر معنوية العلاقة المقدرة من خلال جدول تحليل التباين.

استفد من المعطيات الإحصائية الآتية:

$$\sum x_1 y = 10 \qquad \sum x_2 y = 45 \qquad \sum y^2 = 40 \qquad F_{5\%} = 4.42$$

**السـؤال 9.4:** النتائج الآتية تم الحصول عليها من عينة تمثل (13) عائلة حيث $(Y)$ يمثل الأنفاق الأسبوعي على الشؤون المنزلية، $(X_1)$ يمثل الدخل العائلي و$(X_2)$ يمثل عدد الأطفال في الأسرة.

$$\hat{Y} = 6.26 + 0.45 X_1 - 0.38 X_2$$

$$\sum x_1 y = 38 \qquad \sum x_2 y = -28 \qquad \sum x_1^2 = 74 \qquad \sum x_2^2 = 60$$

$$\sum x_1 x_2 = -12 \qquad \sum e_i^2 = 12.27 \qquad t_{5\%} = 2.179$$

**المطلوب:**

أ- ما مقدار ما يفسره المتغيران $X_1$ و$X_2$ من التغير الحاصل في $Y$.

ب- اختبر معنوية المعلمة $\hat{b}_1$ .

جـ- قدر حدود ثقة 95% للمعلمة $b_1$.

د- كم يكون الأنفاق على الشؤون المنزلية عندما يكون $X_1=300$ ، $X_2 = 4$

هـ- أوجد الانحراف المعياري لـ $\hat{b}_2$ .

**السـؤال 10.4:** النتائج الآتية تم الحصول عليها من عينة تمثل (15) مريضاً حيث $(Y)$ تمثل مدة الرقود في أحد مستشفيات الأمراض المزمنة، $(X_1)$ تمثل عدد المراجعات السابقة و$(X_2)$ يمثل العمر.

$$\hat{Y} = 2.08 + 0.05X_1 + 1.76X_2$$

$\sum x_1 y = 215$ $\sum x_2 y = 9$ $\sum x_1 = 815$

$\sum x_2 = 26$ $\sum y = 66$ $R^2 = 0.83$

$S^2_{\hat{b}_1} = 0.00024$ $S^2_{\hat{b}_2} = 0.093$ $t_{5\%} = 2.36$

$F_{5\%} = 6.54$

أ- أختبر معنوية العلاقة بين $Y$ و $X_1$ و $X_2$.

ب- أختبر معنوية المعلمات المقدرة.

جـ- قدر فترة ثقة 95% للمعلمة $b_1$.

د- قــدر مدة الرقود لمريض راجع المستشفى (5) مرات سابقة وله من العمر (42) عاماً.

# الفصل الخامس: مشكلة الارتباط الذاتي

## The Autocorrelation Problem

1.5 المقدمة.

2.5 مسببات الارتباط الذاتي.

3.5 تحليل الارتباط الذاتي.

4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتي.

1.4.5 طريقة اختبار إحصاءه D-W.

2.4.5 طريقة THEIL-NAGAR.

3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT.

4.4.5 طريقة DURBIN.

5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي.

6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتي.

7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

1.7.5 طريقة التحويل.

2.7.5 طريقة التكرار.

3.7.5 طريقة الفرق العام.

4.7.5 طريقة الفرق الأول.

8.5 الأسئلة والتمارين.

# الفصل الخامس: مشـــــكلة الارتبـــاط الذاتـــــي
# The Autocorrelation Problem

## 1.5 المقدمـــــــــــــة:

مـــن جملة الافتراضات (Assumption) الأساسية التي يقوم عليها النموذج الخطي، افتراض انعدام الارتباط بين قيم المتغير العشوائي U في السنة (t) وقيمته في السنوات السابقة $U_{t-1}$، $U_{t-2}$،...الخ. أو اللاحقة $U_{t+1}$، $U_{t+2}$،...الخ. أي ان قيم U تكـــون مستقلة عن بعضها البعض. ويعبر عن ذلك بمساواة التباين المشترك للأخطاء المتتالية بالصفر وكالآتي:

$$Cov(U_t, U_{t-s}) = 0 \qquad , \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

وتعنـــي فـــي الوقت نفسه أيضاً عدم تأثير الظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t) علـــى تلك التي ستتحقق في السنة (t+1)، غير ان الواقع الاقتصادي يشير الى عكس ذلك، إذ يوجد تأثير للظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t) على تلك التي ستتحقق في السنة (t+1)، (t+2)،...الخ. كما تتأثـــــر بالظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t-1)، (t-2)،...الـــخ، فالـــنماذج التي تستخدم إحصائيات السلاسل الزمنية Time series (والتـــي غالباً ما تعاني من ظاهرة الارتباط الذاتي) يكون حد الخطأ في فترة زمنـــية معيـــنة (t) علـــى علاقة مع حدود الخطأ في فترات زمنية أخرى، مثال ذلك العلاقة بين الدخل القومي ومجمل الأنفاق الاستهلاكي، فزيادة الأنفاق الاستهلاكي في سنة معينة قد يكون مترتباً على الدخل المتولد في السنة السابقة (أو السنتين السابقتين)، وفـــي حالة اعتماد الأخطاء العشوائية على بعضها البعض ينتفي الافتراض الخاص

بانعدام الارتباط فتظهر مشكلة تدعى مشكلة الارتباط الذاتي The Autocorrelation problem، حيث ان:

$$Cov(U_t, U_{t-s}) \neq 0$$

## 2.5 مسببات الارتباط الذاتـــي:

يظهر الارتباط الذاتي للأسباب التي يمكن ان نوردها بما يلي:

1- **الآثار الممتدة لبيانات السلاسل الزمنية:** ان بعض العوامل العشوائية الطارئة وغـــير المـــتكررة قد ينتج عنها ترابط في قيم العنصر العشوائي، $U_t$، لأكثر من فترة زمنية واحدة. فالحروب والفيضانات والزلازل تمتد بآثارها وانعكاساتها على فعالية الاقتصاد لعدة سنوات متتالية، مما يتسبب في حصول ارتباط ذاتي بين قيم $U_t$ المتلاحقة، حيث ان القيم الحالية تتأثر بالقيم الأخرى للفترات السابقة.

2- **حذف بعض المتغيرات المستقلة من العلاقة المدروسة لسبب أو لآخر:** مثل عدم توفـــر البيانات المناسبة عنها أو لغرض تبسيط هيكل النموذج، وقد يكون من بين هذه المتغيرات المحذوفة متغير أو اكثر مترابطة ذاتياً، الأمر الذي يؤدي الى جعل العنصـــر العشوائي يتضمن تلك المتغيرات المرتبطة، ومن ثم فان $U_t$ لا يعكس الخطأ العشوائي في النموذج فحسب، إنما يعكس أيضاً المتغيرات المحذوفة.

3- **معالجـــة البـــيانات:** تجرى على البيانات المنشورة أحياناً عمليات تشذيب وقد يتم تقديـــر قيم بعض المشاهدات اعتماداً على قيم مشاهدات أخرى، ذلك ان عمليات التشذيب والتقدير تعتمد في العادة على أخذ معدلات قيم المشاهدات المتتالية، مما يخلق علاقة ما بين أخطاء تلك المشاهدات وبالتالي التأثير على طبيعة توزيعها.

4- **الصـــياغة غـــير الدقـــيقة للـــنموذج:** بمعنى ان شكل العلاقة الدالية المستخدمة لايـــتطابق مع الشكل الحقيقي، فإذا افترضنا علاقة خطية بين المتغيرين Y وX،

فـــي حين ان العلاقة الحقيقية غير خطية فانه يمكن ان ينتج عن ذلك ترابط ذاتي في عنصر الخطأ.

## 3.5 تحليل الارتباط الذاتـــي:

لتوضيح المشكلة يمكننا أخذ النموذج الخطي البسيط الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + U_t \qquad \ldots(1.5)$$

حيث:

$$E(U_t) = 0$$

$$var(U_t) = E(U_t^2) = \sigma^2 U$$

ولكـــنه لا يستوفي فرض انعدام الترابط بل يتبع نمط ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى، أي انه:

$$U_t = f(U_{t-1}) + e_t$$

$$U_t = \rho(U_{t-1}) + e_t \qquad \ldots(2.5)$$

حيث:

$\rho$ أو (rho): معـــامل الارتباط الذاتي البسيط بين الأخطاء العشوائية وتنحصر قيمته بين (1، 1−)، أي أن $-1 \geq \rho \leq 1$.

$e_t$ : متغـــير عشوائي يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط مقداره صفر، $E(e_t) = 0$، وتباين ثابت مقداره $\sigma^2 e$، حيث $var(e_t) = E(e_t^2) = \sigma^2 e$، وانه $e_t$ مستقل عن $e_{t-1}$، أي $Cov(e_t\ e_{t-1}) = E(e_t\ e_{t-1}) = 0$، بعـــــبارة أخـــــرى $e_t \sim N(0, \sigma^2 e)$.

المعادلـــة (2.5) تـــتكون من جزئين، الأول مترتب على خطأ الفترة السابقة، والثاني يـــنطوي على مجموعة التأثيرات المختلفة العاملة الى جانب المتغيرات المستقلة غير المرتبطة بالفترات الماضية.

من المعادلة (2.5) يمكن الحصول على:

$$U_{t-1} = \rho U_{t-2} + e_{t-1}$$

بتعويض عن كل $U_{t-1}$ بما يساويها في معادلة (2.5) نحصل:

$$U_t = \rho(\rho U_{t-2} + e_{t-1}) + e_t$$

$$U_t = \rho^2 U_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t \qquad \ldots(3.5)$$

وفي حالة $U_{t-2}$:

$$U_{t-2} = \rho U_{t-3} + e_{t-2}$$

بتعويض عن $U_{t-2}$ بما يساويها في معادلة (3.5) نحصل:

$$U_t = \rho^2(\rho U_{t-3} + e_{t-2}) + \rho e_{t-1} + e_t$$

$$U_t = \rho^3 U_{t-3} + \rho^2 e_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t \qquad \ldots(4.5)$$

وبالتعويض المتتالي للأخطاء لعدد من الفترات r (حيث r كبيرة) ، نحصل على:

$$U_t = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \ldots. + \rho^r e_{t-r} \qquad \ldots(5.5)$$

وهـذا يعنـي ان أس $\rho$ يـزداد إلى ما لانهاية وان مقدار e تتناقص بنفس الأس أي بتعبير آخر:

$$U_t = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r e_{t-r}$$

وبأخذ التباين للصيغة (5.5):

$$var(U_t) = E(U_t^2)$$

وبتربيع الطرفين وإدخال التوقع للمعادلة 5.5، نحصل:

$$E(U_t^2) = E(e_t^2) + \rho^2 E(e_{t-1}^2) + \rho^4 E(e_{t-2}^2) + \rho^6 E(e_{t-3}^2) + ... + \rho^r E(e_{t-r}^2)$$

$$\because E(e_t^2) = \sigma^2 e \quad , \quad E(U_t^2) = \sigma^2 U$$

$$\therefore \sigma^2 U = \sigma^2 e + \rho^2 \sigma^2 e + \rho^4 \sigma^2 e + ... + \rho^r \sigma^2 e$$

وبالترتيب نحصل:

$$\sigma^2 U = \sigma^2 e (1 + \rho^2 + \rho^4 + ... + \rho^r)$$

$$\sigma^2 U = \frac{\sigma^2 e}{1 - \rho^2} \qquad ...(6.5)$$

أما التباين المشترك بين الأخطاء العشوائية فيمكن الوصول إليها كالآتي:

$$Cov(U_t \ \ U_{t-1}) = E(U_t \ \ U_{t-1}) \qquad ....(7.5)$$

لذلك وباعتماد المعادلة (5.5)، يمكن كتابة ما يلي:

$$U_t = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + ... + \rho^r e_{t-r} \qquad ...(8.5)$$

$$U_{t-1} = e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^2 e_{t-3} + \rho^3 e_{t-4} + ... + \rho^r e_{t-r} \qquad ...(9.5)$$

وبتعويض المعادلتين 8.5 و 9.5 في الطرف الأيمن من العادلة 7.5، نحصل:

$$E(U_t \;\; U_{t-1}) = E\begin{bmatrix} (e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + ... + \rho^r e_{t-r}) \\ (e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^2 e_{t-3} + ... + \rho^r e_{t-r}) \end{bmatrix}$$

وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$E(U_t \;\; U_{t-1}) = E\begin{bmatrix} e_t + \rho(e_{t-1} + \rho e_{t-2} + ... + \rho^r e_{t-r}) \\ (e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^2 e_{t-3} + ... + \rho^r e_{t-r}) \end{bmatrix}$$

$$\because E(e_t) = 0 \quad , \quad E(e_t^2) = \sigma^2 e$$

$$\therefore E(U_t \;\; U_{t-1}) = \rho E(e_{t-1} + \rho e_{t-2} + ... + \rho^r e_{t-r})^2$$

$$E(U_t \;\; U_{t-1}) = \rho\left[E(e_{t-1}^2) + \rho^2 E(e_{t-2}^2) + .. + \rho^r (e_{t-r}^2)\right]$$

$$E(U_t \;\; U_{t-1}) = \rho(\sigma^2 e + \rho^2 \sigma^2 e + ... + \rho^r \sigma^2 e)$$

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \rho\sigma^2 e(1+\rho^2+...+\rho^r)$$

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \frac{\rho\sigma^2 e}{1-\rho^2} \qquad ...(10.5)$$

وبإجراء مقارنة بين التباين صيغة (6.5) والتباين المشترك صيغة (10.5)، نرى:

$$\sigma^2 U = \frac{\sigma^2 e}{1-\rho^2} \quad , E(U_t \ U_{t-1}) = \frac{\rho\sigma^2 e}{1-\rho^2}$$

وبذلك نجد ان المقام متشابه فيهما ومن ثم فان:

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \rho\sigma^2 U \qquad ...(11.5)$$

وفـــي حالة S من الارتباط المتسلسل، Serial Correlation، للأخطاء فان الصيغة (11.5) تكون:

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \rho^S\sigma^2 U \neq 0 \qquad (S = 0,1,2,...,n-1)$$

ويترتـــب على هذا ان الفرض الخاص بانعدام الارتباط الذاتي بين أخطاء المشاهدات المختلفة في العينة موضوع البحث قد تم تجاوزه، فالتباين المشترك لا يساوي الصفر بل يساوي قيمة هي $\rho^S\sigma^2 U$، نسبة لأن:

$$\rho^S \geq 0 \quad , \quad \sigma^2 U > 0$$

## 4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتي،

## :Estimate of Autocorrelation Coefficient

هناك عدة طرق لتقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى $(\rho)$ نذكر منها ما يلي:

### 1.4.5 طريقة اختبار إحصائية D-W:

ويــتــم تقديــــــر معامل الارتباط الذاتي من خلال طريقة اختيار المعامل $(\rho)$ كما يلي:

باستحضار معادلة تقدير D-W :

$$D^* = 2(1 - \hat{\rho})$$

نســتطيع تقديــر معـــامل الارتباط الذاتي $(\rho)$ في الصيغة الآتية بعد إعادة ترتيب المعادلة أعلاه، نحصل على:

$$\hat{\rho} = \frac{(2 - D^*)}{2}$$

$$\hat{\rho} = \left[\frac{2}{2} - (\frac{1}{2})D^*\right]$$

or

$$\hat{\rho} = \left[1 - (0.5D^*)\right]$$

### 2.4.5 طريقة THEIL-NAGAR:

يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي $(\rho)$ من خلال الصيغة الآتية:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left[1 - \frac{D^*}{2}\right] + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

حيث ان:

k : تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

K+1: تمثل عدد معلمات الانحدار المقدرة.

### 3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT:

يـــتم تقديـــر معامل الارتباط الذاتي من خلال تقدير قيم المتغير العشوائي وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{U}_i \hat{U}_{i-1}}{\sum (\hat{U}_i)^2}$$

او باستخدام طريقة انحدار قيمة المتغير العشوائي $\hat{U}_i$ على $\hat{U}_{i-1}$ وكما يلي:

$$U_i = \hat{\rho}\hat{U}_{i-1}$$

### 4.4.5 طريقة DURBIN:

وهي طريقة ذات مرحلتين في معالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى $(\rho)$ والتي يتم فيها إعادة تقدير انحدار المتغير التابع على قيمته المرتدة زمنياً لفترة زمنية سابقة واحدة، على قيم المتغيرات التوضيحية (المفسرة) للنموذج، وقيم المتغيرات التوضيحية للتخلف الزمني لفترة زمنية واحدة سابقة لها.

تعد هذه الطريقة نموذجاً للمربعات الصغرى الشاملة (GLS)، وعلى وفق هذه الطريقة يتم التقدير على مرحلتين تنصب المرحلة الأولى على تقدير معامل الارتباط الذاتي $(\hat{\rho})$ وكالآتي:

$$(Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) = B_0(1-\hat{\rho}) + B_1(X_t - \hat{\rho}X_{t-1}) + U_t$$

$$Y_t = B_0(1-\hat{\rho}) + \hat{\rho}Y_{t-1} + B_1X_t - B_1\hat{\rho}X_{t-1} + U_t$$

$$Y_t = \overset{*}{B}_0 + \hat{\rho}Y_{t-1} + B_1X_t - \gamma X_{t-1} + U_t$$

حيث أن:

$$\overset{*}{B}_0 = B_0(1-\hat{\rho}) \quad , \gamma = B_1\hat{\rho}$$

يتبين من المعادلة أعلاه، بأنه نموذج يضم ثلاث متغيرات مستقلة هي: $Y_{t-1}$، $X_t$، $X_{t-1}$ والمـــيل للمتغير $Y_{t-1}$ يعطينا تقدير لمعامل الارتباط الذاتي $(\hat{\rho})$، وانه قابل للتقدير بطريقة (OLS).

أما المرحلة الثانية فهي تقدير النموذج الآتي:

$$(Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) = \overset{*}{B}_0 + B_1(X_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) + U_t$$

حيث ان:

$$\overset{*}{B}_0 = B_0(1-\hat{\rho})$$

## 5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي:

تبقى مقدّرات المربعات الصغرى العادية (OLS) تتسم بالخطية وعدم التحيز، إلا إنها تفقد خاصية افضل أو اصغر تباين (التباين بوجود الارتباط الذاتي يفوق التباين في غياب الارتباط الذاتي)، كما ويؤثر الارتباط الذاتي على نتائج تحليل الانحدار فتعطي الاختبارات t ، F نتائج أقل دقة من تلك في حالة عدم وجوده، حيث تستند تلك الاختبارات على التباين والخطأ المعياري وعدم دقة التنبؤات المستحصلة بـ OLS، مما يتطلب استخدام طرق أخرى للتقدير كطريقة المربعات الصغرى الشاملة Generalized least Squares Method (GLS) لأنها تعطي افضل تقدير خطي غير متحيز في حالة وجود الارتباط الذاتي شريطة ان تكون قيمة ($\rho$) معلومة.

## 6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتي:

هناك عدد من الاختبارات الخاصة بالارتباط الذاتي، الا ان أكثرها شيوعاً ودقة هو اختبار داربن-واتسون، Durbin-Watson Test ، الذي يرمز له بالرمز (D-W) أو (d) وذلك لسهولته وإمكانية اعتماده في حالة العينات الصغيرة، ويعتمد هذا الاختبار على بواقي الانحدار المقدر.

ويفترض الاختبار وجود فرضيتين أساسيتين هما:

1- فرضية العدم: التي تنص على انعدام الارتباط الذاتي:

$$H_0 : \rho = 0$$

2- الفرضية البديلة: ويعني وجود ارتباط ذاتي موجب:

$$H_1 : \rho \neq 0$$

ويفترض في هذا الاختبار ان الارتباط الذاتي لقيم U يتخذ نمط الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى:

$$U_t = \rho U_{t-1} + e_t$$

ويتم احتساب الأخطاء العشوائية للنموذج أعلاه كالآتي:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

وبالتالي تحسب قيمة D.W بموجب الصيغة الآتية:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

ان قيمة D.W الاختبارية مجدولة بقيمتين، تشير أحدهما إلى الحد الأدنى، Lower Limit، ويرمز لها بالرمز (dL) والأخرى إلى الحد الأعلى، Upper Limit، ويرمز لها بالرمز (dU) حسب درجات الحرية n و $k'$ ولمستوى معنوية معين، حيث:

n: تمثل عدد المشاهدات في العينة موضوع الدراسة.

$k'$: تمثل العدد الكلي للمتغيرات المستقلة.

ويتم الاختبار على أساس مقارنة قيمة (D.W) المحتسبة بقيم dL و dU المجدولة لاتخاذ القرار الإحصائي المطلوب وعلى الشكل الآتي:

1- عندما $0 < D.W < dL$ نرفض $H_0$ ونقبل $H_1$ أي ان هناك مشكلة ارتباط ذاتي موجب.

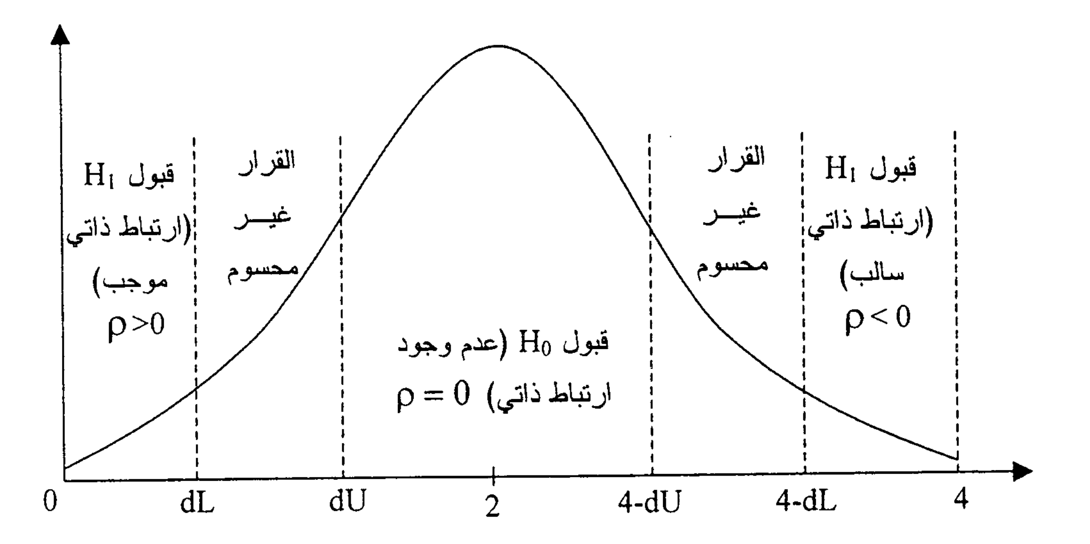
2- عـــندما $dL < D.W < dU$ او $4\text{-}dU < D.W < 4\text{-}dL$ يكـــون الاختيار غير محســـوم وتترك الحرية للباحث بقبول او رفض فرضية العدم، إذ قد يكون السبب في وجود المشكلة خطأ في صيغة النموذج وليس بسبب ارتباط الأخطاء.

3- عندما $dU < D.W < 4\text{-}dU$ نقبل $H_0$ أي انعدام وجود مشكلة الارتباط الذاتي.

4- عندما $4\text{-} dL < D.W < 4$ نرفض $H_0$ ونقبل $H_1$ بمعنى ان هناك مشكلة ارتباط ذاتي سالب.

ويمكن توضيح الاحتمالات الواردة أعلاه في الشكل الآتي:

**شكل رقم 1.5: التوزيع الاحتمالي لـــ D.W (اختبار D.W)**



ويمكن تلخيص مدى اختبار D.W في الجدول الآتي:

| | قيمة D.W | النتيجـــــــــة |
|---|---|---|
| 1 | $4- dL < D^* < 4$ | رفــض فرضية العدم، أي وجود ارتباط ذاتي سالب، أي ان $\rho < 0$. |
| 2 | $4- dU < D^* < 4\text{-}dL$ | نتيجة غير مؤكدة (او محددة). |
| 3 | $2 < D^* < 4\text{-}dU$ | قــبول فرضـــية العدم، أي عدم وجود ارتباط ذاتي، أي ان $\rho = 0$. |
| 4 | $dU < D^* < 2$ | قــبول فرضـــية العدم، أي عدم وجود ارتباط ذاتي، أي ان $\rho = 0$. |
| 5 | $dL < D^* < dU$ | نتيجة غير مؤكدة. |
| 6 | $0 < D^* < dL$ | رفــض فرضية العدم، أي وجود ارتباط ذاتي موجب، أي ان $\rho > 0$. |

بعد أن عرفنا طبيعة هذا الافتراض وأسباب مخالفتها والآثار التي تترتب على المخالفة واختبار وجودها ننتقل الآن إلى تبيان طرق التغلب على هذه المشكلة.

## 7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتي:

## Remedy of First-Order Autocorrelation Problem

تتوقف الطريقة التي تعالج فيها مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى على سبب حدوث المشكلة.

1- عندما يكون السبب هو إهمال متغير أو متغيرات مستقلة من النموذج يتعين إضافة ذلك المتغير أو المتغيرات إلى النموذج.

2- عـــندما يكـــون سبب المشكلة هو الصياغة غير الدقيقة فان المعالجة تتوقف على إعادة صياغة النموذج المراد دراسته من واقع العلاقة.

3- أمـــا إذا كـــان ســـبب المشكلة هو وجود علاقة فعلية بين قيم حد الخطأ أو المتغـــير العشـــوائي فيصبح معالجتها بتحويل المتغيرات المستقلة بالشكل الذي يضمن التخلص من الارتباط الذاتي.

فإذا كان الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى يتعين تحويل المتغيرات المستقلة في النموذج المراد دراسته بإحدى الطرق الآتية:

- طريقة التحويل.
- طريقة التكرار.
- طريقة الفرق العام.
- طريقة الفرق الأول.

وسنحاول بيان الكيفية التي تتم بها معالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى باستخدام الطرق أعلاه. وبافتراض ان نموذج الانحدار المراد تقديره هو:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

**1.7.5 طريقة التحويل، Transformation Method:**

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرق استخداماً في معالجة مشكلة الارتباط الذاتي مـــن الدرجـــة الأولـــى، وتسمى بطريقة كوكران- اوكارت، ويمكن توضيحها باتباع الخطوات الآتية:

أ- بافتراض ان المتغير العشوائي، $U_i$، في المعادلة اعلاه، يخضع للارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، أي ان:

$$U_i = \rho U_{i-1} + e_i \qquad , |\rho| \leq 1$$

وان المتغير العشوائي، $e_i$، يتبع افتراضات OLS للقيمة المتوقعة صفر وثبات التباين وبدون ارتباط ذاتي، أي ان:

$$E(e_i) = 0 \ , E(e_i e_j) = 0 \quad , \ E(e_i)^2 = \sigma^2$$

أي ان:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2)$$

ولغرض التخلص من الارتباط الذاتي، يمكن تحويل البيانات في المعادلة اعلاه، وذلك باستخدام التخلف الزمني للمتغير التابع والمتغير المستقل مع المتغير العشوائي ويكتب النموذج كما يلي:

$$Y_{i-1} = B_0 + B_1 X_{i-1} + U_{i-1} \qquad \ldots(12.5)$$

وبضـــرب المعادلـــة (12.5) بمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى ($\rho$) نحصل على:

$$\rho Y_{i-1} = \rho B_0 + \rho B_1 X_{i-1} + \rho U_{i-1} \qquad \ldots (13.5)$$

وبطرح المعادلة (13.5) من المعادلة (12.5) نحصل على:

$$Y_i - \rho Y_{i-1} = B_0(1-\rho) + B_1(X_i - \rho X_{i-1}) + (U_i - \rho U_{i-1})$$

ومن هذه المعادلة يلاحظ ان الحد الأخير يمثل:

$$U_i - \rho U_{i-1} = e_i$$

أي ان:

$$U_i = \rho U_{i-1} + e_i$$

ويلاحظ من هذه الطريقة بأنها غير عملية، بسبب ان قيمة $\rho$ مجهولة، لذا فقد اقترح داربن الطريقة الثانية، الطريقة التكرارية Iterative Method.

### 2.7.5 طريقة التكرار، Iterative Method:

على وفق هذه الطريقة:

1- نبدأ باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لتقدير معلمات النموذج ولغرض الإيضاح نفترض نموذجاً يتضمن متغير مستقل واحد وكالآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + U_t$$

حيث نحصل على $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ باتباع OLS وكالآتي:

$$\hat{Y}_t = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_t$$

ثم يتم حساب بواقي المربعات الصغرى ($e_t$) من خلال المعادلتين أعلاه، حيث:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

2- نحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي التقديري ($\hat{\rho}$) ووفق القانون الآتي:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t \ e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} \qquad (i = 1,2,3,\dots,n)$$

3- بعــد حساب قيمة $(\hat{\rho})$ يتم تحويل بيانات كل من المتغير التابع $Y_t$ والمستقل $X_t$ إلى القيمتين الجديدتين $\overset{*}{Y}_t$ و $\overset{*}{X}_t$ وكالآتي:

$$\overset{*}{Y}_t = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$

$$\overset{*}{X}_t = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

ويــتم تقدير معالم النموذج من جديد في ضوء البيانات المحولة للمتغيرين المذكورين باعــتماد OLS أي أجــراء انحدار المتغير التابع المحول $\overset{*}{Y}_t$ على المتغير المستقل المحول $\overset{*}{X}_t$ فنحصل على:

$$\overset{*}{\hat{Y}}_t = \overset{*}{\hat{B}}_0 + \overset{*}{\hat{B}}_1 \overset{*}{X}_t$$

ومن ثم نحسب البواقي الجديدة $\overset{*}{e}_t$ ، وكالآتي:

$$\overset{*}{e}_t = \overset{*}{Y}_t - \overset{*}{\hat{Y}}_t$$

وبالتالي نحسب قيمة D.W مرة أخرى بموجب الصيغة الآتية:

$$D.W = \frac{\sum (\overset{*}{e}_t - \overset{*}{e}_{t-1})^2}{\sum \overset{*}{e}_t^{\,2}}$$

وتقـــارن مع القيمة الجدولية لقبول أو رفض فرضية العدم، ففي حالة قبول $H_0$ يعني انعـــدام الارتباط الذاتي والتوقف عند هذا الحد. أما في حالة قبول $H_1$ عندها تجرى عملـــية تنقـــية للبيانات مرة ثانية باتباع الخطوات السابقة نفسها أي تكرار ما قمنا به وبالأســـلوب ذاتـــه لرؤية مدى تناقص الارتباط الذاتي، ويمكن الاستمرار في عملية التصـــحيح والـــتقدير الـــى أن تـــتقارب القيم التقديرية لكل من $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ للنموذج المدروس بين مرحلة وأخرى.

### 3.7.5 طريقة الفرق العام، The Generalized Difference Method:

وتســـمى طـــريقة المـــربعات الصـــغرى الشاملة، GLS، تميزاً عن طريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، ولمعالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى نتبع الخطوات الآتية:

1- تقديـــر معـــامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، $\rho$، باستخدام أياً من الطرق المستخدمة في تقدير $\rho$ التي تم ذكرها سابقاً.

2- يتم حساب قيمة البواقي (أو الفروق) الأولى للمتغيرات التابعة والمستقلة $Y_i$ و $X_i$ على التوالي وذلك طبقاً لطريقة الفرق العام باستخدام الصيغة الآتية:

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = B_0(1-\rho) + B_1(X_i - \rho X_{i-1}) + U_i \qquad \ldots(14.5)$$

وبتحويل البيانات من خلال استخدام الصيغة الآتية:

$$\overset{*}{Y}_i = Y_i - \rho Y_{i-1}$$

$$\overset{*}{X}_i = X_i - \rho X_{i-1}$$

حيث ان:

$\overset{*}{Y}_i$ : قيمة $Y_i$ المحولة.

$\overset{*}{X}_i$ : قيمة $X_i$ المحولة.

ولغرض تجنب إهمال المشاهدة الأولى في عملية أيجاد الفروق، سوف يتم تقدير المشاهدة الأولى المحولة لكل من المتغير التابع، $Y_i$، والمتغير المستقل، $X_i$، كما يلي:

$$\overset{*}{Y}_i = Y_i(1-\rho^2)^{1/2}$$
$$\overset{*}{X}_i = X_i(1-\rho^2)^{1/2}$$

3- باستخدام طريقة OLS في تقدير معاملات النموذج الجديد بعد التحويل كما في الصيغة الآتية:

$$\overset{*}{Y}_i = B_0 + B_1\overset{*}{X}_i + U_i$$

ومن ثم يتم اختبار وجود الارتباط الذاتي من خلال تقدير النموذج اعلاه، وذلك باستخدام اختبار D-W المشار إليه سابقاً. فإذا كانت النتيجة تشير الى وجود الارتباط الذاتي، فانه يجب تكرار استبدال القيم لكل من $\overset{*}{Y}_i$ و $\overset{*}{X}_i$ بقيم الفروق الأولى لهذين المتغيرين بنفس الطريقة المشار إليها سابقاً ومن ثم أجراء الانحدار على البيانات المحولة واعادة الاختبار الى أن نتأكد بإزالة الارتباط الذاتي من النموذج.

### 4.7.5 طريقة الفرق الأول، The First Difference Method:

لقد بينّا سابقاً أن قيمة $\rho$ تنحصر بين الصفر والواحد صحيح، $0 < \rho < 1$، لذا يمكن البدء من أقصى الطرفين في التقدير.

عــند الطــرف الأول نســتطيع الافتراض بان $\rho = 0$، وهذا يعني لاوجود للارتباط الذاتي. وعند الطرف الثاني نفترض ان $\rho = 1$، وهذا يعني ان هناك ارتباط ذاتــي موجــب أو سالب. وكما هو معروف انه عند إجراء الانحدار، فأن واحدة من الافتراضــات العامة، هي عدم وجود ارتباط ذاتي وبالتالي نترك اختبار DW، أو أي اختبارات أخرى.

فــإذا كان $\rho = 1$ فان معادلة الفرق العام تحقق معادلة الفرق الأول كما هو في المعادلة (15.5)، ويتم حساب الرقم الفردي الأولي للمتغيرات $Y_i$ و$X_i$ على وفق معادلة الفرق الأول الآتية:

$$Y_i - Y_{i-1} = B(X_i - X_{i-1}) + (U_i - \rho U_{i-1})$$

$$Y_i - Y_{i-1} = B(X_i - X_{i-1}) + e_i$$

$$\Delta Y_i = B\Delta X_i + e_i \qquad .....(15.5)$$

حيث أن $\Delta$ تُمثّل بدالة الفرق الأول، ولنجاح الفروق للقيمتين، بإجراء انحدار المعادلة (15.5) لابــد مــن عمل الفروق الأولى لكل من المتغير التابع والمتغيرات المستقلة واستخدامهم كمدخلات في تحليل الانحدار.

ويجــب الملاحظة هنا ان الصورة المهمة لنموذج الفرق الأول لا يوجد فيها الحد الثابت، ولغرض أجراء انحدار المعادلة (15.5) فانه سوف يستخدم الانحدار من خلال النموذج الأصلي لكن بافتراض ان النموذج الأصلي هو:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + B_2 t + U_i$$

وحيث أن t تمثل اتجاه المتغير، وان $U_i$ تحقق الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، لذا يمكن التحقق من ان تحويل الفرق الأول في المعادلة (15.5) تصبح كما يلي:

$$\Delta Y_i = BX_i + B_2 + e_i \qquad \dots (16.5)$$

حيث ان:

$$\Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}$$
$$\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$$

وان المعادلـــة (16.5) تبيـــن ان هـــناك الحـــد الثابت في صيغة الفرق الاول، وذلك بمقارنتها في المعادلة (15.5) لكن بالطبع، $B_2$ يمثل معامل اتجاه المتغير في النموذج الأصلي، لذلك فانه:

"إذا يوجـــد الحـــد الثابت في صيغة الفرق الأول، يدل على أنه كان يوجد حد اتجـــاه خطـــي فـــي الـــنموذج الأصلي، وان الحد الثابت هو في الحقيقة معامل اتجاه المتغير".

وإذا كانت قيمة $B_2$، على سبيل المثال، موجبه في المعادلة (16.5)، فأن هذا يعني وجود اتجاه متصاعد في Y بعد السماح لأثر كل المتغيرات الاخرى، وبدلاً من افـــتراض ان $\rho = 1$، نفـــترض إن $\rho = -1$ هـــذا يعني أن هناك ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى سالب والذي لا يمثل سلسلة زمنية نمطية، Typical، في الاقتصاد.

والآن فان معادلة الفرق العام (14.5) تأخذ الكيفية الآتية:

$$Y_i + Y_{i-1} = 2B_0 + B_1(X_i - X_{i-1}) + e_i$$

وبقسمة الطرفين على 2، نحصل على:

$$\frac{Y_i + Y_{i-1}}{2} = B_0 + B_1 \frac{X_i - X_{i-1}}{2} + \frac{e_i}{2}$$

فالــنموذج أعــلاه يُعــرف على انه معدل نموذج الانحدار ذات الفترتين وذلك بسبب انحــدار قيمة ما يحرك متوسط أحدهما إلى الآخر. وان تحويل الفرق الأول الذي قدم سابقاً اصبح معروفاً إلى حد ما في الاقتصاد القياسي التطبيقي لأنه من السهل تمثيله، Perform، لكــن يمكــن ملاحظـــة ان مــثل هذا التحويل يتوقف على افتراض ان $\hat{\rho} = +1$، أنــه يكون مرتبط إيجابياً وبشكل تام. إذا لم تكن هذه الحالة، فان معالجته ســوف تكــون أســوأ مــن المشكلة الأصلية. لكن كيف نستطيع ان نجد ما إذا كان الافتراض $\rho = +1$ يكون قابل للتشخيص في الوضع المعطى؟ والإجابة هي:

$\rho$: تتوقف على اختبار إحصائية D لدرابن واطسون، D-W. وباستحضار المعادلة الآتية:

$$D^* = 2(1-\rho^2)$$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D^*}{2} \qquad \ldots(17.5)$$

الذي تقترح بطريقة مبسطة وسهلة للحصول على تقدير $\hat{\rho}$ من التقدير لإحصائية $D^*$. واضح من المعادلة (17.5) بأن قضية الفرق الأول $\hat{\rho} = +1$ تكون سالبة المفعول عندما $D^* = 0$ وبشكل تقريبي.

ويكــون واضـــح أيضاً عندما $D^* = 2$ و $\hat{\rho} = 0$، وعندما $D^* = 4$ و $\hat{\rho} = -1$ لذلك، فان إحصائية $D^*$ تزودنا بطريقة عمل جاهزة للحصول على تقدير معــامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى ($\rho$)، لكن يلاحظ ان العلاقة (17.5) هي فقط مقربة الى واحد.

وربما لا يكون ذلك صحيح للعينات الصغيرة. للعينات الصغيرة ربما يستخدم اختبار آخر هو اختبار THEIL-NAGAR المشار إليه سابقاً لتعديل إحصائية $D^*$.

وحالمـــا تم تقدير $\hat{\rho}$ من المعادلة (17.5) بالإمكان تحويل البيانات باستخدام المعادلة الآتية:

$$Y^* = B_0^* + BX_i^* + e_i \qquad ...(18.5)$$

حيث ان:

$$Y_i^* = (Y_i - \rho Y_{i-1})$$
$$B_0^* = B_0(1-\rho)$$
$$X_i^* = (X_i - \rho X_{i-1})$$

ومـــن ثم تُستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية OLS، لتقدير معاملات النموذج الجديد المتكون من الفرق الأولى لـــ$Y_i$ و$X_i$ في الصيغة أعلاه.

وبذلـــك يـــتم اختـــبار وجود الارتباط الذاتي في المعادلة (18.5) بعد تقديرها باستخدام اختبار D-W. فإذا اظهر الاختبار وجود الارتباط الذاتي فانه يجب استبدال القـــيم الجديـــدة بالفـــرق الأول لهـــذه المتغيرات الجديدة $Y_i^*$ و $X_i^*$ بالطريقة نفسها الموضـــحة فـــي المعادلـــة (15.5) ثم أجراء الانحدار على البيانات المحولة واعادة الاختبار الى ان يتم التأكد من عدم وجود الارتباط الذاتي.

ويتضح مما سبق ان طريقة الفرق الأول هي عبارة عن إعادة أجراء الانحدار علـــى شـــكل فـــروق وحذف الحد المطلق (الثابت) ويتم استخدام هذه الطريقة عندما $\hat{\rho} = +1$. وتمثل هذه الطريقة حالة خاصة من طريقة الفرق العام.

**العلاقة بين $\hat{\rho}$ وW–D:**

تـــربط بيـــن إحصاءه W–D الاختبارية و $\hat{\rho}$، مقدرة معلمة الارتباط الذاتي البسيط بين الأخطاء العشوائية، العلاقة الآتية:

$$D.W \cong 2(1-\hat{\rho})$$

ويمكن الوصول الى العلاقة أعلاه كالآتي:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

وبفك القوس في البسط نحصل:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

وعندما تكون حجم العينة كبير جداً $(n \rightarrow \infty)$ فأننا نحصل على الآتي:

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 \cong \sum_{t=2}^{n} e_t^2 \cong \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2$$

وعليه فإن:

$$D.W = \frac{2\sum_{t=1}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$D.W = 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}\right)$$

$$D.W = 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}\right)$$

وبما أن $e_t$ عبارة عن القيمة التقديرية للمتغير العشوائي $U_t$ فان القيمة

$$\left(\frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}\right)$$

تمثل القيمة التقديرية لمعامل الارتباط الذاتي البسيط بين الأخطاء العشوائية ونرمز له بالرمز $\hat{\rho}$، أي ان:

$$D.W = 2(1-\hat{\rho})$$

أو بصيغة أخرى:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D.W}{2}$$

وبما أن قيمة $\hat{\rho}$ تنحصر بين (1، 1−) لذا فان قيمة D.W تتراوح بين (0 و4).

فإذا كانت $\hat{\rho} = 0$، فأن:

انعدام الارتباط الذاتي كلياً: $D.W=2(1-0)=2$

عندما $\hat{\rho} = 1$، فان:

وجود ارتباط ذاتي موجب: $D.W = 2\ (1-1) = 0$

عندما $\hat{\rho} = -1$، فأن:

وجود ارتباط ذاتي سالب: $D.W = 2 [1-(-1)] = 2 + 2 = 4$

**مثال 1.5:** الجدول الآتي يتضمن البيانات الخاصة بعدد حوادث السرقات ($Y_t$) وعدد مكاتب الشرطة ($X_t$) في أحد الدول للمدة (1990-1999)، وباستخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS) ، تم تقدير العلاقة الآتية:

$$\hat{Y}_i = 1346.28941 - 12.10030471 X_i$$

$$(5.319) \qquad (3.105)$$

$$R^2 = 0.546 \quad , \quad F = 9.641$$

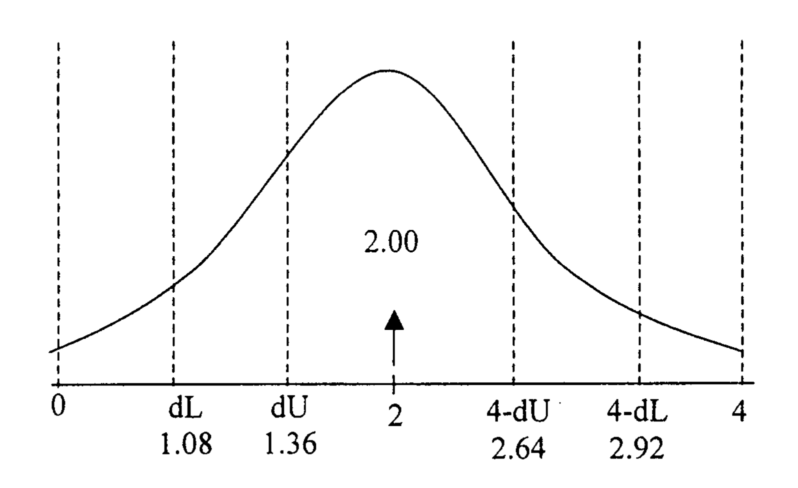
**والمطلـــوب:** معـــرفة مـــا إذا كان النموذج الخاص بالعلاقة أعلاه يعاني من مشكلة الارتـــباط الذاتي مستخدماً احصاءة W-D عند مستوى معنوية 5% إذا علمت ان $dL = 1.08$، $dU = 1.36$.

| السنة | عدد حوادث السرقات، $Y_t$ | عدد مكاتب الشرطة، $X_t$ | $\hat{Y}_t$ | $e_t$ | $e_{t-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 580 | 60 | 620.2711274 | -40.2711274 | - |
| 1991 | 890 | 59 | 632.3714321 | 257.6285679 | -40.2711274 |
| 1992 | 430 | 77 | 414.5659473 | 15.4340527 | 257.6285679 |
| 1993 | 690 | 52 | 717.0735651 | -27.0735651 | 15.4340527 |
| 1994 | 310 | 87 | 293.5629 | 16.4371 | -27.0735651 |
| 1995 | 750 | 50 | 741.2741745 | 8.7258255 | 16.4371 |
| 1996 | 460 | 80 | 378.2650332 | 81.7349668 | 8.7258255 |
| 1997 | 630 | 52 | 717.0735651 | -87.0735651 | 81.7349668 |
| 1998 | 800 | 53 | 704.9732604 | 95.0267396 | -87.0735651 |
| 1999 | 215 | 67 | 535.5689944 | 320.5689944 | 95.0267396 |
| $n = 10$ | $\sum Y_i = 5755$ | $\sum X_i = 637$ | $\sum \hat{Y}_i = 5755$ | $\sum e_t = 0$ | |

| $e_t - e_{t-1}$ | $(e_t - e_{t-1})^2$ | $e_t^2$ |
|---|---|---|
| – | – | 1621.763702 |
| 297.8996953 | 88744.22846 | 66372.479 |
| −242.1945152 | 58658.18319 | 238.2099827 |
| −42.5076178 | 1806.897571 | 732.9779272 |
| 43.5106651 | 1893.177977 | 270.1782564 |
| −7.7112745 | 59.46375441 | 76.14003066 |
| 73.0091413 | 5330.334713 | 6680.604798 |
| −168.8085319 | 28496.32044 | 7581.805739 |
| 182.1003047 | 33160.52097 | 9030.081239 |
| −415.595734 | 172719.8141 | 102764.4802 |
| | $\sum(e_t - e_{t-1})^2 =$ 390868.9412 | $\sum e_t^2 =$ 195368.7208 |

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$D.W = \frac{390868.9412}{195368.7208} = 2.000673087$$




وعليه، فإن النموذج أعلاه لا يعاني من مشكلة الارتباط الذاتي ذلك ان قيمة D.W المحتسبة تقع في منطقة القبول أي قبول فرضية العدم التي تنص بعدم وجود ارتباط ذاتي بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي.

**مثال 2.5:** في المثال الوارد في الفصل الأول حللنا العلاقة بين عدد سنوات الخدمة ($X_i$) ومعدل الأجر السنوي ($Y_i$) لعينة تمثل (8) موظفين في أحد الدوائر. حيث تم تقدير المعادلة الآتية:

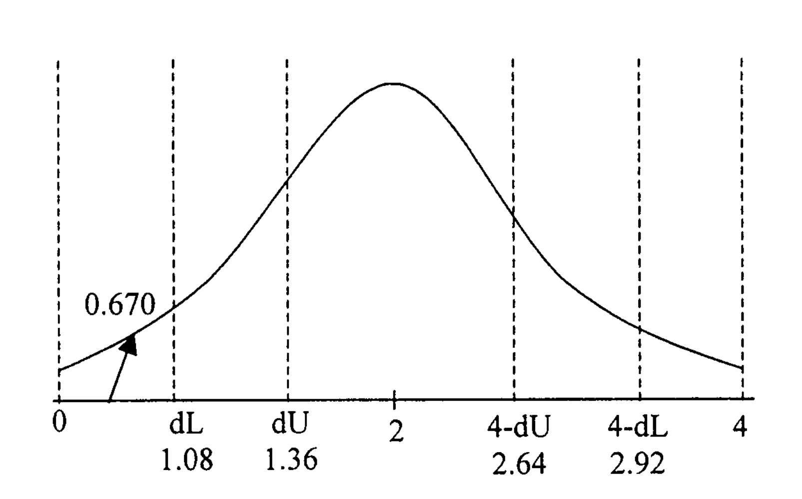
$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762 X_i$$

وفي الواقع لا يمكن الأخذ بالمعادلة أعلاه بصورة نهائية إلا بعد التأكد من عدم وجود الارتباط الذاتي، ولغرض ذلك نجري الآن اختبار (D.W) على العينة موضوع البحث.

| $X_t$ | $Y_t$ | $\hat{Y}_t$ | $e_t$ | $e_{t-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 25.6 | 30.43333334 | −4.83333334 | – |
| 8 | 32.7 | 36.38095239 | −3.68095239 | −4.83333334 |
| 12 | 45.4 | 42.32857143 | 3.07142857 | −3.68095239 |
| 16 | 53.9 | 48.27619048 | 5.62380952 | 3.07142857 |
| 20 | 59.0 | 54.22380953 | 4.77619047 | 5.62380952 |
| 24 | 62.6 | 60.17142858 | 2.42857142 | 4.77619047 |
| 28 | 65.0 | 66.11904763 | −1.11904763 | 2.42857142 |
| 32 | 65.8 | 72.06666667 | −6.26666667 | −1.11904763 |
| $\sum X_i = 144$ | $\sum Y_i = 410$ | $\sum \hat{Y}_i = 410$ | $\sum e_t = 0$ | |

| $e_t - e_{t-1}$ | $(e_t - e_{t-1})^2$ | $e_t^2$ |
|---|---|---|
| – | – | 23.36111118 |
| 1.15238095 | 1.327981854 | 13.5494105 |
| 6.75238096 | 45.59464863 | 9.433673461 |
| 2.55238095 | 6.514648514 | 31.62723352 |
| −0.84761905 | 0.718458053 | 22.81199541 |
| −2.34761905 | 5.511315204 | 5.897959142 |
| −3.54761905 | 12.58560092 | 1.252267598 |
| −5.14761904 | 26.49798178 | 39.27111115 |
| | $\sum(e_t - e_{t-1})^2 =$ 98.75063496 | $\sum e_t^2 =$ 147.204762 |

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{98.75063496}{147.204762} = 0.670838589$$




يتضح مما سبق أن النموذج المقدّر يعاني من وجود مشكلة الارتباط الذاتي الموجب بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي لأن قيمة D.W المحتسبة اقل من الحد الأدنى، أي ان:

$$0 < D.W < dL$$
$$0 < 0.670 < 1.08$$

ولاستبعاد أثر الارتباط الذاتي نتبع طريقة التكرار:

| $e_t.e_{t-1}$ | $e_{t-1}^2$ | $Y_{t-1}$ | $\hat{\rho}Y_{t-1}$ | $\overset{*}{Y}_t$ |
|---|---|---|---|---|
| – | – | – | – | – |
| 17.79126991 | 23.36111118 | 25.6 | 15.77581522 | 16.92418478 |
| −11.30578234 | 13.5494105 | 32.7 | 20.15113897 | 25.24886103 |
| 17.27312923 | 9.433673461 | 45.4 | 27.9774223 | 25.9225777 |
| 26.86038543 | 31.62723352 | 53.9 | 33.21548595 | 25.78451405 |
| 11.59931967 | 22.81199541 | 59.0 | 36.35832414 | 26.24167586 |
| −2.717687092 | 5.897959142 | 62.6 | 38.57679815 | 26.42320185 |
| 7.012698485 | 1.252267598 | 65.0 | 40.05578083 | 25.74421917 |
| $\sum e_t.e_{t-1} =$ 66.51333329 | $\sum e_{t-1}^2 =$ 107.9336508 | | | $\sum \overset{*}{Y}_t =$ 172.2892344 |

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t.e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} = \frac{66.51333329}{107.9336508} = 0.616242782$$

$$\overset{*}{Y}_t = Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}$$

$$\overset{*}{X}_t = X_t - \hat{\rho}X_{t-1}$$

| $X_{t-1}$ | $\hat{\rho}X_{t-1}$ | $\overset{*}{X}_t$ | $\overset{*}{X}_t \overset{*}{Y}_t$ | $\overset{*}{Y}_t^{\,2}$ |
|---|---|---|---|---|
| – | – | – | – | – |
| 4 | 2.464971128 | 5.535028872 | 93.67585139 | 286.4280305 |
| 8 | 4.929942256 | 7.070057744 | 178.5109055 | 637.5049833 |
| 12 | 7.394913384 | 8.605086616 | 223.0660264 | 671.9800346 |
| 16 | 9.859884512 | 10.14011549 | 261.4579503 | 664.8411648 |
| 20 | 12.32485564 | 11.67514436 | 306.3753539 | 688.6255519 |
| 24 | 14.78982677 | 13.21017323 | 349.0550737 | 698.185596 |
| 28 | 17.2547979 | 14.7452021 | 379.6037146 | 662.7648207 |
| | | $\sum \overset{*}{X}_t =$ 70.98080841 | $\sum \overset{*}{X}_t \overset{*}{Y}_t =$ 1791.744876 | $\sum \overset{*}{Y}_t^2 =$ 4310.330182 |

$\mathbf{n = 7}$ ، $\sum \overset{*}{Y}_t = 172.2892344$ ، $\sum \overset{*}{X}_t = 70.98080841$

$\sum \overset{*}{X}_t \overset{*}{Y}_t = 1791.744876$ ، $\sum \overset{*}{Y}_t^2 = 4310.330182$

$\sum \overset{*}{X}_t^2 = 785$ ، $\bar{\overset{*}{Y}}_t = 24.61274777$

$\bar{\overset{*}{X}}_t = 10.14011549$

| $\overset{*}{X}_t^2$ | $\hat{\overset{*}{Y}}_t$ | $\overset{*}{e}_t$ | $\overset{*}{e}_t^2$ |
|---|---|---|---|
| – | – | – | – |
| 30.63654461 | 21.49190313 | −4.56771835 | 20.86405092 |
| 49.9857165 | 22.53218468 | 2.71667635 | 7.380330391 |
| 74.04751567 | 23.57246622 | 2.35011148 | 5.523023968 |
| 102.8219422 | 24.61274777 | 1.17176628 | 1.37306215 |
| 136.3089958 | 25.65302932 | 0.58864654 | 0.346504749 |
| 174.5086768 | 26.69331086 | −0.27010901 | 0.072958877 |
| 217.420985 | 27.73359241 | −1.98937324 | 3.957605888 |
| $\sum \overset{*}{X}_t^2 =$ 785.7303766 | $\sum \hat{\overset{*}{Y}}_t =$ 172.2892344 | $\sum \overset{*}{e}_t = 0$ | $\sum \overset{*}{e}_t^2 =$ 39.51753694 |

$$\sum \overset{*}{x}_t \overset{*}{y}_t = \sum \overset{*}{X}_t \overset{*}{Y}_t - \frac{(\sum \overset{*}{X}_t)(\sum \overset{*}{y}_t)}{n}$$

$$= 1791.744876 - \frac{(70.98080841)(172.2892344)}{7}$$

$$= 1791.744876 - 1747.032734$$

$$= 44.712142$$

$$\sum \overset{*}{x}_t^2 = \sum \overset{*}{X}_t^2 - \frac{(\sum \overset{*}{X}_t)^2}{n}$$

$$= 785.730766 - \frac{(70.98080841)^2}{7}$$

$$= 785.730766 - 719.7535946$$

$$= 65.976782$$

| $\overset{*}{e}_{t-1}$ | $\overset{*}{e}_t - \overset{*}{e}_{t-1}$ | $(\overset{*}{e}_t - \overset{*}{e}_{t-1})^2$ |
|---|---|---|
| – | – | – |
| – | – | – |
| −4.56771835 | 7.2843947 | 53.06240615 |
| 2.71667635 | −0.36656487 | 0.134369803 |
| 2.35011148 | −1.1783452 | 1.38849741 |
| 1.17176628 | −0.58311974 | 0.340028631 |
| 0.58864654 | −0.85875555 | 0.737461094 |
| −0.27010901 | −1.71926423 | 2.955869493 |
| | | $\sum(\overset{*}{e}_t - \overset{*}{e}_{t-1})^2 =$ 58.61863258 |

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum \overset{*}{x}_t \overset{*}{y}_t}{\sum \overset{*}{x}_t^2} = \frac{44.712142}{65.976782} = 0.677695101$$

$$\hat{B}_0 = \bar{\overset{*}{Y}}_t - \hat{B}_1 \bar{\overset{*}{X}}_t$$

$$= 24.61274777 - (0.677695101)\,(10.14011549)$$

$$= 24.61274777 - 6.871906591$$

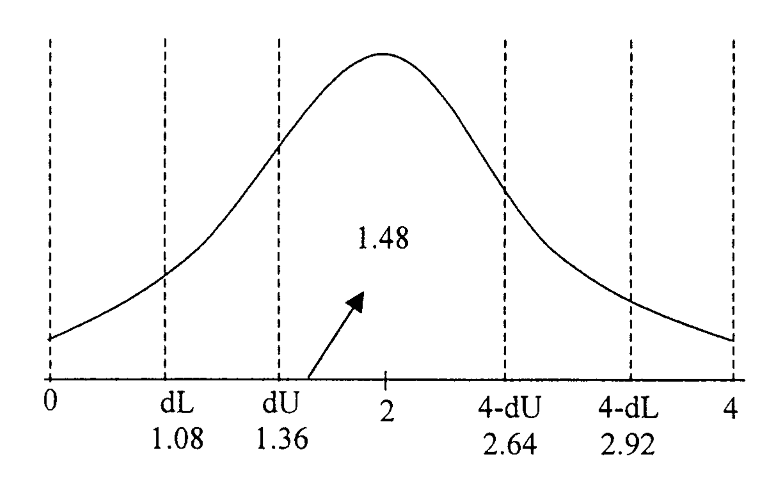
$$= 17.74084118$$

$$\hat{\overset{*}{Y}}_t = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overset{*}{X}_t$$

$$\hat{\overset{*}{Y}}_t = 17.74084118 + 0.677695101 \overset{*}{X}_t$$

$$D.W = \frac{\sum(\overset{*}{e}_t - \overset{*}{e}_{t-1})^2}{\sum \overset{*}{e}_t^{\,2}}$$

$$D.W = \frac{58.61863258}{39.51753694} = 1.483357444$$




وبمقارنـــة قيمة D.W المحتسبة مع مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية 5% يتضح بأن:

$$dU < D.W < 4\text{-}dU$$

$$1.36 < 1.48 < 2.64$$

عليه نقبل فرضية العدم والتي تنص على انعدام وجود ارتباط ذاتي بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي.

## الأسئلة والتمارين

**السؤال 1.5:** باحث اقتصادي استخدم أسلوب (OLS) لتقدير دالة الاستيرادات التالية:

$$\hat{Y}_t = -2461 + 0.28X_t$$

$$S.E \quad (250) \quad (0.01) \quad r^2 = 0.98$$

ومن الانحرافات $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ وجد أن:

$$\sum_{t=2}^{20}(e_t - e_{t-1})^2 = 537192 \quad , \quad \sum_{t=1}^{20} e_t^2 = 573069$$

المطلـــوب: أحســـب إحصاءه (D.W) واختبر لوجود مشكلة الارتباط الذاتي استخدم (5%) مســـتوى دلالــــة لقيمة عليا ودنيا لإحصاءه (D-W) مساوية إلى du=1.41 ،dL=1.20

**السؤال 2.5:** فرضاً باحث قدر العلاقة بين المتغير ($Y_t$) والمتغير ($X_t$) وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 6.65 + 2.75X_t$$

مع المعلومات التالية:

$$D - W = 0.8229 \quad , \quad \sum_{t=2}^{n} e_t . e_{t-1} = 110.29 \quad , \quad \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 = 185.6775$$

**المطلـــوب:** من قيمة D-W وجد أن هناك ارتباط ذاتي موجب، قدرهُ وضع الخطوات اللازمة لمعالجة هذه المشكلة في الجانب التطبيقي.

**السؤال 3.5:** المتغير العشوائي $(Y_t)$ يرتبط بالمتغير المستقل $(X_t)$ وفق نموذج الانحدار الآتي:

$$Y_i = B_0 + B_1X_t + U_t$$
$$E(U_t) = 0 \quad , \text{var}(U_t) = \sigma^2$$

وقد وجد بأن الخطأ العشوائي $(U_t)$ يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى بمقدار $\hat{\rho}$.

**المطلوب:** اشرح الخطوات اللازمة لمعالجة أثر الارتباط الذاتي عند تقدير كل من $(B_0)$، $(B_1)$.

**السؤال 4.5:** ان مشكلة الارتباط الذاتي تنشأ عند استخدام بيانات السلاسل الزمنية ولا تنشأ عند استخدام بيانات المقطع العرضي، ناقش هذه العبارة موضحاً طبيعة المشكلة، وما هي النتائج المترتبة على وجودها في تحليل الانحدار.

**السؤال 5.5:** باحث اقتصادي استخدم أسلوب (OLS) لتقدير دالة الاستيرادات الآتية:

$$\hat{Y}_t = -2461 + 0.28X_t$$
$$\text{S.E} \quad (250) \quad (0.01) \qquad r^2 = 0.98$$

ومن الانحرافات، $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ، وجد أن:

$$\sum_{t=2}^{20}(e_t - e_{t-1})^2 = 537192 \quad , \quad \sum_{t=2}^{20} e_t^2 = 573069$$

المطلوب:

احسب إحصاءة D-W واختبر لوجود مشكلة الارتباط الذاتي، استخدم (5%) مستوى دلالة لقيمة عليا ودنيا لإحصاءة (D.W) مساوية إلى :

$$dU = 1.41 \quad , \quad dL = 1.20$$

**السؤال 6.5:** البيانات الآتية تبين بواقي المربعات الصغرى لإحدى علاقات النظرية الاقتصادية:

**$e_t$:** 260, 29, 148, -57, -76, -181, 40, -81, -89 , 22, 81 , 293, -82, -157, -363

**المطلوب:**

أ- اختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي علماً ان قيمة dL=1.08 ، dU=1.36 .

ب- اشرح الخطوات اللازمة لمعالجة أثر هذه المشكلة إن وجدت.

# الفصل السادس: مشكلة التعدد الخطي

# The MULTICOLLINEARITY PROBLEM

# الفصل السادس: مشكلة التعدد الخطي

# The Multicollinearity problem

## 1.6 مقدمـــــــــــة:

يـــنص أحد الافتراضات الخاصة بنموذج الانحدار الخطي بعدم وجود ارتباط خطـــي تـــام بين قيم مشاهدات المتغيرات المستقلة الداخلة في نموذج الانحدار المراد تقديره، أي أن:

$$r_{x_i x_j} \neq 1$$

وفي حالة اعتماد قيمة أحد المتغيرات المستقلة على قيمة واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة في النموذج المدروس ينتفي الافتراض الخاص بانعدام الارتباط فتظهر مشكلة تدعى بمشكلة التعدد الخطي، The Multicollinearity Problem.

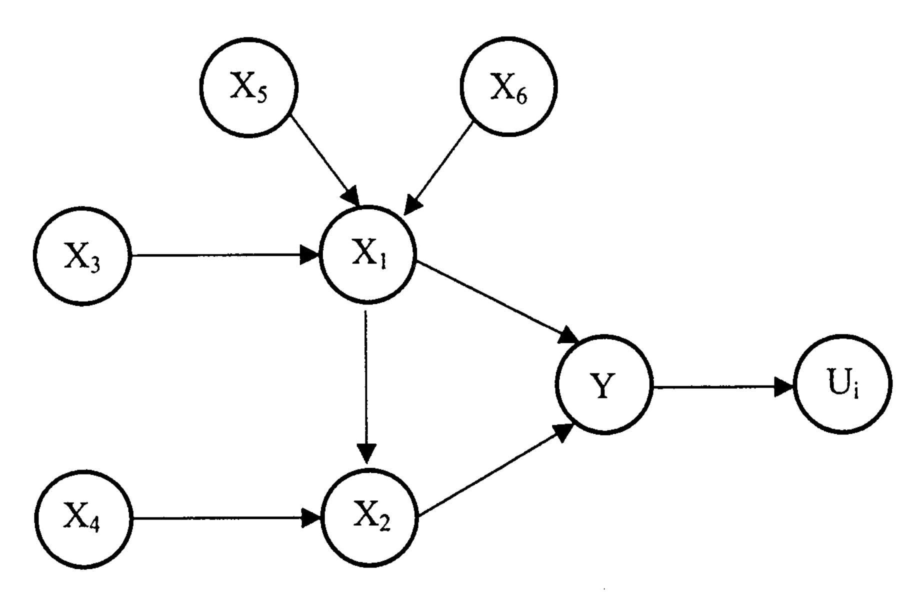
وتجـــدر الإشارة هنا إلى أن التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة لا يشكل مشكلة إلا إذا تجـــاوزت شـــدته حداً معيناً يتعذر عندها تحديد تأثير أي منها على المتغير التابع بشكل منفصل، حيث أنه غالباً ما يكون هنالك قدر من الارتباط لسبب أو لآخر، ما بين المتغـــيرات المســـتقلة أهمها هو أن معظم المتغيرات المستقلة تميل إلى التحرك سوياً علـــى مـــر الزمـــن تحـــت تأثير العوامل الاقتصادية نفسها، مثلاً في فترات الرواج الاقتصادي تميل كل من الدخل، الأسعار، العمالة، الإنتاج، الاستهلاك، الاستثمار،..الخ نحو الارتفاع. بينما يحدث العكس في فترات الكساد.

وســـيتناول هذا الفصل طبيعة وأسباب الارتباط الخطي وآثاره وكيفية تحديده والحلول والمعالجات المقترحة للارتباط الخطي.

## 2.6 طبيعة التعدد الخطي، The Nature of Multicollinearity:

يقصـــد بالـــتعدد الخطـــي، Multicollinearity، طـــبقاً لمفهـــوم RANGER FRISH بشكل أساسي إلى وجود علاقة خطية تامة بين بعض أو كل المتغيرات المستقلة المتضمنة في نموذج الانحدار المراد دراسته لـــ K من متغيرات الانحدار المتضمنة في النموذج $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ . فإذا كانت هذه العلاقة الخطية تامـــة، Perfect ، أي $r_{X_1X_2} = 1$ معنى ذلك أن معامل الارتباط يساوي واحد. ففـــي هذه الحالة لا يمكن فصل أثر $X_1$ و $X_2$ عن بعضها البعض. ويلاحظ أنه في الحـــياة الواقعـــية دائماً توجد علاقة بين المتغيرات الاقتصادية ولا يوجد دليل يوضح درجـــة الارتـــباط التي إذا ظهرت فإنها ستؤثر بصورة خطيرة على تقدير المعلمات، ولكن من المعروف أنة إذا كان لدينا متغيرين مستقلين يتغيران تقريباً في نفس الاتجاه فأنه من الصعب فصل أثر كل منهما على المتغير التابع. وبالإمكان توضيح ذلك من خلال المخطط الآتي:

شكل (1.6): يوضح آثار التعدد الخطي



عند استخدام البيانات في تقدير نموذج الانحدار المتعدد، غالباً ما يوجد بعض الارتباط، أو بعض درجات الاعتماد الخطي بين المتغيرات المستقلة، والشكل (1.6) يبين الارتباطات السببية في حالة افتراضية اتجاه السببية في المتغيرات. فالمتغير ($X_1$). يؤثر بشكل مباشر بالمتغير ($X_2$). والمتغير ($X_2$) يتأثر بشكل مباشر بالمتغير ($X_1$) والمتغير ($X_4$)، كذلك يتأثر المتغير ($X_1$) بالمتغيرات ($X_3$, $X_5$, $X_6$). ويتأثر المتغير (Y) بشكل مباشر بالمتغيرات ($X_1$) و ($X_2$) وغير مباشر بالمتغيرات الأخرى. يلاحظ أن المتغير ($X_1$) له أثار مباشرة وغير مباشرة على المتغير التابع، (Y). ويمكن ملاحظة أن المتغير العشوائي، ($U_i$)، يتأثر بشكل مباشر بالمتغير التابع، (Y) وليست له أي ارتباط بأي من المتغيرات المستقلة الموضحة في الشكل (1.6).

## 3.6 أسباب حدوث ظاهرة التعدد الخطي:

1- من الممكن أن تتغير بعض المتغيرات المستقلة سوية، فعلى سبيل المثال، وفي فترة الازدهار الاقتصادي يلاحظ أن المتغيرات الاقتصادية كالدخل والاستثمار تزداد بوقت واحد، وتنخفض في وقت واحد في فترة الكساد. لذلك فعندما نستخدم هذه المتغيرات كمتغيرات تفسيرية في النموذج تبرز ظاهرة التعدد الخطي، مما يجعل من الصعب أو المستحيل عزل تأثيراتها الفردية على المتغير التابع.

2- استخدام المتغيرات المتخلفة زمنياً كمتغيرات تفسيرية في النموذج. فعلى سبيل المثال، يستخدم الدخل الحالي، والدخل السابق كمتغيرات تفسيرية سوية في النموذج. ومن الطبيعي أن القيم المتطابقة لأي متغير اقتصادي تُظهر نوع من الارتباط، ولهذا السبب تظهر مشكلة الارتباط الخطي المتعدد.

$$C_t = B_o + B_1 X_t + B_2 X_{t-1} + U$$

فإذا كان:

$$X_1 = 2X_2$$

Or;

$$X_1 = X_2^2$$

هذا يؤدي إلى وجود تعدد خطي.

## 4.6 أنواع التعدد الخطي:

### 1.4.6 غياب التعدد الخطي، Absence of Multicollinearity:

تحدث هذه الحالة عندما لا ترتبط المتغيرات المستقلة $X_i$ في نموذج الانحدار الخطـــي المتعدد ارتباطاً خطياً وبالتالي فأن مصفوفة $(X'X)$ تصبح مصفوفة قطرية وتأخذ الصيغة التالية:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} \sum X_1^2 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & \sum X_2^2 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \sum X_k^2 \end{bmatrix}$$

وأن مقلـــوب المصـــفوفة ســـيكون قطرياً أيضاً وللعناصر المعطاة بواسطة المصفوفة $(X'X)$ وتحسب المعلمات $(\hat{b}_i)$ بموجب الصيغة التالية:

$$\hat{B}_i = \frac{\sum x_i y}{\sum x_i^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

وبالتالي فلا توجد حاجة إلى نموذج الانحدار المتعدد ويقدر الثابت $\hat{B}_0$ بموجب:

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_i \overline{X}_i \qquad (i = 1, 2, ...., k)$$

يتبين مما يسبق بأن هذه الصيغ مطابقة لانحدار Y البسيط على كل متغير من المتغيرات المستقلة $X_i$ بشكل مستقل.

### 2.4.6 التعدد الخطي التام، Exact Multicollinearity:

إن حالة التعدد الخطي التام هي حالة مثالية غير ممكنة التحقق في الواقع العملي ذلك أنها تتحقق فقط في حالة وجود علاقة خطية تامة بين قيم أثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة، ويمكن حينذاك التعبير عن واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة كتركيب خطي للمتغير أو المتغيرات المستقلة الأخرى. ولتوضيح هذه الحالة نفترض وجود نموذج انحدار خطي متعدد يحتوي متغيرين مستقلين وكما يلي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + U_i \qquad ...(1.6)$$

الذي يمكن تقدير معلماته بموجب الصيغة التالية:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

حيث محدد المصفوفة:

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\sum X_1^2)(\sum X_2^2) - (\sum X_1 X_2)^2$$

فوجـــود علاقـــة خطية تامة بين قيم مشاهدات المتغيرين المستقلين $X_1$ و $X_2$ يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$X_2 = \rho X_1$$

حيث $\rho$ عبارة عن قيمة ثابتة لا تساوي الصفر، فالمحدد $|X'X|$ تكون:

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \rho \sum X_1^2 \\ \rho \sum X_1^2 & \rho^2 \sum X_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\sum X_1^2)(\rho^2 \sum X_1^2) - (\rho \sum X_1^2)(\rho \sum X_1^2)$$

$$= \rho^2 (\sum X_1^2)^2 - \rho^2 (\sum X_1^2)^2$$

$$= 0$$

وبالتالـــي لا يمكـــن حســـاب معكـــوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمصـــفوفة الشـــاذة وعليه لا يمكن الحصول على مقدرات OLS المعطاة بالقانون $\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$ فتنهار OLS تحت وطأة الارتباط الخطي المتعدد التام.

### 3.4.6 التعدد الخطي غير التام، No Exact Multicollinearity:

يتضـــح ممـــا ســـبق أن حالتي التعدد الخطي التام وغياب التعدد الخطي هما حالـــتان لا تحدثان في الحياة العملية. وفي الواقع هناك دائماً علاقة أرتباطية بدرجات مـــتفاوتة بين المتغيرات المستقلة تقع ضمن الحالتين المتطرفتين المذكورتين إلا وهو التعدد الخطي غير التام ويسود دراسات القياس الاقتصادي خاصة تلك التي تعتمد على بيانات السلاسل الزمنية نسبة لتحرك هذه السلاسل سوية في اتجاه واحد وذلك لمختلف

المتغـــيرات الاقتصــــادية، وتشير هذه الحالة إلى الوضع الذي يكون فيه بين متغيرين مســـتقلين أو أكثر في نموذج الانحدار المتعدد ارتباط خطي ولكنه غير تام ولتوضيح ذلك نفترض النموذج التالي:

$$Y_i = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + U_i$$

وإن هـــناك علاقـــة خطـــية غير تامة بين قيم مشاهدات المتغيرين $X_1$ و $X_2$ ممثلة بالمعادلة الآتية:

$$X_2 = \rho X_1 + V$$

حيث $V$ متغير يمكن تمثيله بالمقدار الآتية:

$$\sum X_1V = \sum V = 0$$

عليه يمكن كتابة محدد المصفوفة كالآتي:

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1(\rho X_1 + V) \\ \sum X_1(\rho X_1 + V) & \sum(\rho X_1 + V)^2 \end{vmatrix}$$

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \rho\sum X_1^2 + \sum X_1V \\ \rho\sum X_1^2 + \sum X_1V & \rho^2\sum X_1^2 + 2\rho\sum X_1V + \sum V^2 \end{vmatrix}$$

$$|X'X| = \rho^2(\sum X_1^2)^2 + 2\rho\sum X_1V\sum X_1^2 + \sum X_1^2\sum V^2 - [\rho^2(\sum X_1^2)^2 + 2\rho\sum X_1V\sum X_1^2 + \sum X_1^2V^2]$$

وبعد فك القوس والاختصار، نحصل:

$$|X'X| = \sum X_1^2\sum V^2 - \sum X_1^2V^2$$

وبمـــا ان $\sum X_1^2 > 0$ وان $V^2 > 0$ فان محدد المصفوفة $(X'X)$ لايساوي الصفر وهكذا يمكن الحصول على المعكوس $(X'X)^{-1}$.

## 5.6 النتائج المترتبة على وجود التعدد الخطي:

تحـــتفظ مقدرات OLS بخاصية الخطية وعدم التحيز فيما لو كان النموذج قد حـــدد بدقة، ولكنه لا يكتسب خاصية الكفاءة أي أقل تباين ممكن، إذ إنه بتزايد درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة فأن محدد المصفوفة $(X'X)$ يبدأ بالتناقص وينعكس ذلك على عناصر معكوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$، حيث يأخذ قيم مرتفعة مما يقود إلى ارتفاع التباين المتحصل عليه من قطر مصفوفة التباين والتباين المشترك، والذي يقود بـــدوره إلى زيادة حجم الأخطاء المعيارية فيؤشر بصورة خاطئة عدم معنوية بعض المتغـــيرات المســـتقلة في النموذج نتيجة تناقص قيم (t) المحتسبة بالمقارنة مع القيم الجدولـــية، والذي يقود بالباحث خطأ إلى حذف المتغيرات غيرالمعنوية من النموذج، في حين أن السبب في عدم معنويتها هو الارتباط الذي يجمع بين المتغيرات المستقلة والذي يؤدي إلى كبر حجم التباين ومن ثم الوصول إلى القياسات غير الدقيقة وبالتالي صعوبة الاعتماد على النتائج بثقة.

وهـــنا لابـــد أن نشير إلى إن تباين معاملات النموذج المقدرة في هذه الحالة تكون $\hat{B} = 0$ و $var(\hat{B}) = \infty$ . ويجب التأكيد في هذا المجال على نقطتين هما:

أ- إن تقديـــر المعلمات المقدرة غير متحيزة، أي أن $E(\hat{B}) = B$ حتى عندما يكون الارتـــباط الخطـــي قوي فأن الخاصية الإحصائية لعدم التحيز لا تعتمد على هذا الافتراض.

ب- تشير بعض الدراسات التطبيقية إلى أن الارتباط الخطي يكون مشكلة غير مهمة إذا كان:

$$R^2_{y.x_1,x_2} \geq r_{x_1x_2}$$

أي ان $r_{x_1x_2}$ أقل أو يساوي $R^2_{y.x_1,x_2}$ ويكون مؤثر على القياس، اذا كان:

$$R^2_{y.x_1,x_2} < r_{x_1x_2}$$

## 6.6 طرق اختبار وجود التعدد الخطي:

هـــناك عـــدد من الاختبارات لاكتشاف التعدد الخطي ولكن سنتناول أهم هذه الاختبارات:

### 1.6.6 اختبار Firsch:

يشـــير هذا الاختبار إلى ان خطورة التعدد الخطي تعتمد على درجة الارتباط بيـــن $X_1$ و $X_2$ فضـــلاً عـــن معامل التحديد $R^2_{y.x_1,x_2}$، وعليه يمكن اقتراح استعمال العناصر الآتية للاختبار الخاص بمشكلة التعدد الخطي وهي:

الخطأ المعياري Se , $r_{x_1x_2}$ , $R^2_{y.x_1,x_2}$

ولكن يجب أن يفهم بأن أي من هذه العناصر لمفرده لا يمكن الاستفادة منه وذلك للأسباب الآتية:

أ- الأخطـــاء المعيارية الكبيرة لا تعني دائماً أن هناك مشكلة ارتباط خطي، فقد تعود أسبابها إلى مشاكل قياسية أخرى.

ب- الارتـــباط بيـــن المتغيرات المستقلة قد يكون مرتفعاً أو قد يكون منخفضاً، وبالرغم من ذلك قد لا تتأثر قيم المعلمات أو أخطاءها المعيارية.

جـــ- ربما تكون قيم معامل التحديد، $R^2$، مرتفعة نسبة إلى معامل الارتباط بين $X_1$ و $X_2$ ومع ذلك فالنتائج قد تكون غير دقيقة وغير مهمة.

ولهـــذه الأســـباب يتطلب الأمر تحليل هذه العناصر الثلاثة أعلاه مجتمعة للحكم على وجود التعدد الخطي من عدمه.

ويتم الأجراء وفقاً لهذا الاختبار عن طريق إيجاد معادلة الانحدار للمتغير الـــتابع علـــى كـــل من المتغيرات المستقلة على حدة ثم بعد ذلك نقوم بإجراء الاختـــبار علـــى وفـــق المعايـــير الإحصائية المتعارف عليها ثم نختار معادلة الانحدار التي تعطي أفضل النتائج. وعلى أية حال، يمكن استعمال مجموعة من المعايـــير لاكتشـــاف مشـــكلة التعدد الخطي، ولمعرفة خطورة هذه المشكلة في معادلـــة الانحـــدار فقد تم اقتراح الأسلوب الذي يتضمن الحصول على معادلة انحـــدار المتغير التابع على كل من المتغيرات المستقلة على حده، ثم تقيم نتائج التقدير المتحصل عليها من حيث قيمة معامل التحديد، $R^2$، والأخطاء المعيارية للقـــيم المقدرة لمعاملات الانحدار ومن ثم القيام بأجراء اختيار المعادلة المقدرة التـــي تكـــون نتائج تقديرها أكثر قبولاً من باقي المعادلات المقدرة، ويجب أن تتميز المعادلة المقدرة المختارة بالآتي:

**أولاً:** أن تكـــون قـــيمة معامل التحديد، $R^2$، الخاصة بها أكبر من مثيلتها لأي معادلة مقدرة أخرى.

**ثانـــياً:** أن تكون الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعلمات الانحدار الخاصة بها أقل من مثيلتها لأي معادلة مقدرة أخرى.

لغرض توضيح هذه الطريقة، أفترض لدينا المعادلة الآتية:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, ....., X_k)$$

والتي يُمكن وصفها بالشكل الآتية:

$$Y = f(X_1)$$
$$Y = f(X_2)$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$Y = f(X_k)$$

وبافتراض أن أفضل النتائج يُمكن الحصول عليها من $Y = f(X_2)$ عندئذ نقوم بأخذ أفضـــل معادلـــة ونضيف عليها في كل مرة متغير جديد ونجري عليها الاختبار، فإذا كانت المشكلة موجودة نحذف المتغير المضاف ونضيف متغير جديد.

وبعد ذلك نبدأ تدريجياً في إضافة المتغيرات المستقلة الواحدة تلو الأخرى إلى المعادلـــة التي تم اختيارها ثم اختبار آثار كل منها على قيمة $R^2$ والخطأ المعياري والقـــيم المقدرة لمعاملات الانحدار ويعتبر المتغير المستقل المضاف إلى المعادلة مفيد أو غير مفيد أو زائد وفقاً للحالات الآتية:

1- أذا أدت إضـــافة المتغـــير المستقل إلى معادلة الانحدار أي تحسن في قيمة معامل الـــتحديد، $R^2$، دون التأثـــير على قيم المعلمات، فأن المتغير المستقل المضاف يعتبر مفيداً.

2- إذا لم تؤدي إضافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار أي تحسن في قيمة معامل الـــتحديد، $R^2$، ولا يؤثر على قيم معلمات الانحدار، فأن هذا المتغير المضاف يعتبر زائداً ولا حاجة له لذا يجب حذفه من المعادلة.

3- إذا أدت إضـــافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار إلى التأثيرعلى إشارة وقيم المعــاملات ممـــا يجعلها غير مقبولة من الناحية الإحصائية والاقتصادية، فأنه يعتبر غير مفيد ولا حاجة لوجوده في معادلة الانحدار.

**مثـــــال 1.6**: إذا توفرت لدينا البيانات الآتية والخاصة بدالة الطلب على الملابس:

| Year | الإنفاق على الملابس C | الدخل لمتاح Y | الأصول السائلة L | الرقم القياسي للملابس 1993=100 $P_c$ | الرقم القياسي العام 1993=100 $P_o$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1989 | 8.4 | 82.9 | 17.1 | 92 | 94 |
| 1990 | 9.6 | 88.0 | 21.3 | 93 | 96 |
| 1991 | 10.4 | 99.9 | 25.1 | 96 | 97 |
| 1992 | 11.4 | 105.3 | 29.0 | 94 | 97 |
| 1993 | 12.2 | 117.7 | 34.0 | 100 | 100 |
| 1994 | 14.2 | 131.0 | 40.0 | 101 | 101 |
| 1995 | 15.8 | 148.2 | 44.0 | 105 | 104 |
| 1996 | 17.9 | 161.8 | 49.0 | 112 | 109 |
| 1997 | 19.3 | 174.2 | 51.0 | 112 | 111 |
| 1998 | 20.8 | 184.7 | 53.0 | 112 | 111 |

وحسب مفهوم النظرية الاقتصادية، فإن دالة الأنفاق على الملابس تكون:

$$C = B_0 + B_1 Y + B_2 L + B_3 P_c + B_4 P_o + U_i$$

وبتطبـــيق طريقة المربعات الصغرى على هذه الدالة، حصلنا على المعادلة التقديرية التالية:

$$C = -13.53 + 0.097Y + 0.015L - 0.199P_c + 0.34P_o$$

$$Se \quad (7.5) \quad (0.03) \quad (0.05) \quad (0.09) \quad (0.15)$$

$$R^2 = 0.998, \sum \hat{y}^2 = 28.15, \sum e_i^2 = 0.33, DW = 3.4$$

وبتطبيق تحليل التباين لاختبار مدى أهمية هذه المعادلة، نحصل على ما يلي:

$$F = \frac{\sum \hat{y}^2 /(k-1)}{\sum e_i^2 /(n-k)} = \frac{28.15/4}{0.33/5} = 15.6$$

حيث أن قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% هي 5.19، وفي هذه الحالة نرفض فرضـــية العـــدم، $H_0$، القائلة بأنه لا توجد علاقة بين الأنفاق على الملابس من جهة والمتغـــيرات المستقلة من جهة أخرى، ونقبل الفرض البديل، $H_1$، القائل بوجود هذه العلاقة.

ومن حل البيانات نحصل على مصفوفة الارتباط بين المتغيرات وكما يلي:

$r_{YL} = 0.99$ , $r_{LPc} = 0.96$

$r_{yPc} = 0.98$ , $r_{LP0} = 0.92$

$r_{YP0} = 0.99$ , $r_{PcP0} = 0.99$

ولغرض توضيح تأثير الارتباط الخطي لابد من تقدير معادلة الانحدار للمتغير التابع مع كل متغير مستقل على حدة، وبذلك نحصل على المعادلات التالية:

1) $\hat{C} = -1.24 + 0.118Y$ $R^2 = 0.995$
Se (0.37) (0.002) $D.W = 2.6$

2) $\hat{C} = -38.51 + 0.516P_c$ $R^2 = 0.951$
Se (4.20) (0.04) $D.W = 2.4$

$$3)\quad \hat{C} = 2.11 + 0.327L \qquad R^2 = 0.967$$
$$Se \quad (0.81) \quad (0.02) \qquad D.W = 0.4$$

$$4)\quad \hat{C} = -53.65 + 0.663P_o \qquad R^2 = 0.977$$
$$Se \quad (3.63) \quad (0.03) \qquad D.W = 2.1$$

وحيـــث أنـــه في النظرية الاقتصادية، يعتمد الاستهلاك على الدخل، لذا نأخذ التقدير الأول لمعادلـــة الانحـــدار كأفضـــل معادلـــة مقدرة، ونجري عليها الانحدار بإضافة المتغيرات المستقلة إليها وكما هو مبين في الجدول الآتي:

| المعادلة | Bo | Y $B_1$ | $P_c$ $B_2$ | L $B_2$ | $P_o$ $B_3$ | $R^2$ | D.W |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C=F(Y) | -1.24 (0.37) | 0.118 (0.002) | — | — | — | 0.995 | 2.6 |
| $C=F(Y,P_c)$ | 1.40 (4.92) | 0.126 (0.01) | -0.036 (0.07) | — | — | 0.996 | 2.5 |
| $C=F(Y,P_c,L)$ | 0.94 (5.17) | 0.138 (0.02) | -0.034 (0.06) | -0.037 (0.05) | — | 0.996 | 3.1 |
| $C=F(Y,P_c,P_o)$ | -12.76 (6.52) | 0.104 (0.01) | -0.188 (0.07) | — | 0.319 (0.12) | 0.997 | 3.5 |
| $C=F(Y,P_c,L,P_0)$ | -13.53 (7.5) | 0.097 (0.03) | -0.199 (0.09) | 0.015 (0.05) | 0.34 (0.15) | 0.998 | 3.4 |

ونلاحظ من التحليل أن إضافة المتغير $P_c$ إلى المعادلة أدى إلى زيادة حقيقية في قيمة معـــامل الـــتحديد، $R^2$، ويلاحـــظ أيضاً أن المعاملات، $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ أخذت إشاراتها الصـــحيحة، إلا إن الخطأ المعياري الخاص بقيمة $\hat{B}_2$ يوضح بأنها ليست ذات أهمية إحصـــائية. وكذلـــك فأن إضافة الأصول السائلة، L، لا تعطي نتائج مهمة للمعاملات

المقـــدرة $\hat{B}_2$ و $\hat{B}_3$ وذلك بسبب الارتباط الذاتي بين أسعار الملابس، $P_c$ ، والأصول السائلة، $L$، مما جعل من الصعب الحصول على تقديرات لهذه المعلمات ذات أهمية، وذلك لأن الخطأ المعياري أكبر من قيمة المعامل $B_1$ لهذه المعلمات.

ولكن بالرغم من الارتباط بين الأنفاق الاستهلاكي، $C$، وأسعار الملابس، $P_c$، والأصـــول الســـــــائلة، $L$، إلاّ أن قـــيمة $B_1$ لم تتأثر وعليه يمكن اعتبار الأصول السائلة، $L$ ، متغير زائد لا حاجة لوجوده وهنا يسقط المتغير، $L$.

أن إسقاط المتغير $L$ وإضافة المتغير $P_o$، أسعار السلع الأخرى، في المعادلة، يلاحـــظ أن قـــيمة $R^2$ زادت بنســـبة طفيفة، كما أنه يلاحظ بعد إضافة أسعار السلع الأخرى، $P_o$، أن كل المعاملات تأخذ الإشارات المتوقعة وإلى حد ما زادت الأهمية الإحصائية.

أمـــا معادلـــة الانحـــدار بالنسبة لكافة المتغيرات المستقلة، توضح بأن مشكلة التعدد الخطي ليست خطيرة بالنسبة للمعاملات $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_2$.

كمـــا أن معـــامل الأصول السائلة، $L$، $\hat{B}_3$، ليس ذات أهمية إحصائية وعليه يمكن إسقاط المتغير المستقل، $L$.

وبذلك يمكن أن تتلخص العلاقة التالية، كأفضل ما يمكن الحصول عليه:

$$C=F(Y, P_c, P_o)$$

**2.6.6 طريقة FARRAR- GLAUBER:**

نشـــــرت هذه الطريقة لأول مرة عام 1967 لمقالة بعنوان التعدد الخطي في نمـــــوذج الانحـــدار من قبل FARRAR and GLAUBER. وهذه الطريقة تقوم على ثلاثة اختبارات أساسية هي:

أولاً: اختبار مربع كاي $\chi^2$، Chi-Square.

ثانياً: اختبار إحصاءه F.

ثالثاً: اختبار إحصاءه t.

وسنتناول بشيء من الايجاز عن كل اختبار من الاختبارات الثلاث أعلاه.

### 1.2.6.6 اختبار مربع كاي، $\chi^2$، Chi-Square.

يستخدم هذا الاختبار لتحديد وجود أو عدم وجود مشكله التعدد الخطي في النموذج المقدر، ولتطبيق هذا الاختبار، يتم أتباع الخطوات الآتية:

أ- حساب قيمة محدد الارتباط الخطي، $|R|$، وأن قيمة المحدد تمثل معلمات الارتباط البسيطة بين كل متغيرين من المتغيرات المستقلة على حدة.

ب- وأن معامل الارتباط بين المتغير نفسه يساوي واحد صحيح. لذلك فأن القطر الرئيسي للمحدد سوف يكون عبارة عن واحد. أما بقية العناصر فسوف يكون أقل من الواحد الصحيح.

يفترض الاختبار وجود فرضيتين أساسيتين هما:

1- فرضية العدم، $H_0$: التي تنص على أن المتغيرات مستقلة.

2- الفرضية البديلة، $H_1$: وتنص على أن المتغيرات غير مستقلة.

والصيغة الرياضية لهذا الاختيار هي:

$$\chi^2 = -[n - 1 - \frac{1}{6}(2k + 5)] \,.\, \ln|R| \qquad \ldots(2.6)$$

حيث أن:

n: تمثل حجم العينة (عدد المشاهدات).

K: تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

$\ln|R|$: اللوغاريـــتم الطبيعـــي لمحدد مصفوفة معاملات الارتباطات الجزئية الجزئية الآتية:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \dots\dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \dots\dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & 1 \end{bmatrix}$$

ولمـــا كانـــت قيمة المحدد تقع بين الصفر والواحد الصحيح فأنه قيمة $\ln|R|$ ستكون سالبة دائماً.

ويمكن التمييز بين ثلاث حالات لمحدد الارتباط، $|R|$ ، وكما يلي:

1- إذا كانت قيمة المحدد0 = $|R|$ فأن ذلك يعني أن تكون العلاقة 100% بين $X_1$ و $X_2$ ، أي يوجـــد تعـــدد خطي تام ولذلك تكون معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرين مساوية للواحد الصحيح وكما يلي:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X2X_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2- إذا كانـــت قيمة محدد الارتباط، $|R| = 1$ معنى ذلك عدم وجود ارتباط بين المتغيرين $X_1$ و $X_2$، أي يكـــون معـــامل الارتـــباط بيـــن كـــلا المتغيرين مساو للصفر مثلاً $r_{X_1X_2} = 0$ و $r_{X_2X_1} = 0$ وكما مبين أدناه:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

3- إذا كانــت قــيمة محــدد الارتــباط محصــورة بيــن الصفر والواحد الصحيح، أي $0 \le |R| \le 1$، معــنى ذلــك لابد من اتباع خطوات الاختبار لغرض معرفة الارتباط الخطــي والتي ذكرت سابقاً والمتضمنة اختبار الفرضيات وإيجاد قيمة $\chi^2$ المحسوبة باستخدام المعادلة (2.6).

وبعــد احتساب قيمة $\chi^2$ تقارن مع قيمتها الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية $k(k-1)/2$.

فإذا كانت القيمة المحتسبة أكبر من مثيلتها الجدولية ترفض فرضية العدم (Ho) وتقبل الفرضــية الــبديلة ($H_1$) أي أن هناك مشكلة تعدد خطي بين المتغيرات المستقلة في الــنموذج وبــالعكس في حالة كون قيمة $\chi^2$ المحتسبة أقل من قيمتها الجدولية تقبل (Ho) أي أنــه ليست هنالك مشكلة تعدد خطي بين المتغيرات المستقلة. وكلما كبرت القيمة المحسوبة مقارنة بنظيرتها الجدولية كلما دل ذلك على أن مشكلة التعدد الخطي أشد.

**مثــــال 2.6**: إذا كانت لدينا مصفوفة الارتباطات، R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & 1 \end{bmatrix}$$

وتوفرت لدينا المعلومات الآتية:

$$r_{12} = 0.8811 \quad , \quad r_{13} = 0.9399 \quad , \quad r_{23} = 0.9866$$
$$n = 15 \quad , \quad k = 4$$

فأن محدد الارتباط $|R|$، يصبح كما يلي:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & 0.8811 & 0.9399 \\ 0.8811 & 1 & 0.9866 \\ 0.9399 & 0.9866 & 1 \end{vmatrix} = 0.000969$$

$$\chi^2 = -[N - 1 - \frac{1}{6}(2K + 5)] \ln|R|$$

$$\chi^2 = -[15 - 1 - \frac{1}{6}(2(4) + 5)] \ \ln 0.000969$$

$$\chi^2 = -[14 - \frac{1}{6}(13)] - 6.939$$

$$\chi^2 = -[14 - 6.5)(-6.939)$$

$$\chi^2 = 52$$

أمـــا قيمة $\chi^2$ الجدولية بدرجات حرية 2/(3)(4) والتي تساوي 6 وبمستوى معنوية 1% فأنهـــا بلغت 16.8 وهي أصغر من $\chi^2$ المحسوبة، وعليه نستنتج وجود مشكلة التعدد الخطي.

**2.2.6.6 اختبار إحصاءه F:**

وفي حالة وجود مشكلة التعدد الخطي في النموذج يتطلب الأمر تحديد المتغير المســتقل $(X_j)$ الــذي ارتبط خطياً مع غيره من المتغيرات المستقلة (K) وتسبب في إحــداث المشكلة، ويتم هذا من خلال اختبار (F) والذي يتطلب احتســـاب معــامل التحديد المتعدد $R^2$ بين كل متغير في النمــوذج $(X_j)$ وبقية المتغيـــرات المستقلة (K) والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هو:

$$F_j = \frac{(R^2_{X_i.X_1X_2...X_k})/(k-1)}{(1-R^2_{X_i.X_1X_2...X_k})/(n-k)} \qquad (j = 1, 2, 3, ..., k)$$

وبعــد احتســـــاب قــيمة $(F_j)$ تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية مساوية إلى (K-2)، (n-k-1) للبســط والمقام وبمستوى معنوية معين بهدف قبول أو رفض أحد هاتين الفرضيتين:

$$H_0 : R^2_{X_i.X_1X_2...X_k} = 0$$

$$H_1 : R^2_{X_i.X_1X_2...X_k} \neq 0$$

فـــإذا كانـــت قيمة F المحتسبة اكبر من القيمة الجدولية ترفض $H_o$ وتقبل $H_1$ أي أن المتغـــير المســـتقل $X_j$ يرتـــبط خطـــياً مع بقية المتغيرات المستقلة. أما إذا كانت F المحتسبة أقل من مثيلتها الجدولية تقبل $H_o$ أي أن المتغير $X_j$ لا يرتبط خطياً مع بقية المتغيرات المستقلة ومن ثم فليـــس لـــــه علاقة بوجود مشكلة التعدد الخطي الذي يعانـــي مـــنه النموذج. وتكرر العملية لكل متغير من المتغيرات المستقلة في النموذج حتى يتم تشخيص المتغيرات المستقلة المتداخلة خطياً كلاً على انفراد.

**3.2.6.6 اختبار إحصاءه t:**

ولتحديد المتغيرات المستقلة المسؤولة عن حصول المشكلة يتطلب ذلك إجراء اختبار آخر هو أختبار (t) والذي يعتمد بدوره على قيم معاملات الارتباط الجزئية ما بين كل أثنين من المتغيرات المستقلة ($r_{ij}$) بصورة منفردة بافتراض ان بقية المتغيرات المستقلة في النموذج ثابتة. والصيغة الرياضية لهذا الاختبار:

$$t_{ij} = \frac{(r_{X_i X_j.X_1X_2...,X_k})\sqrt{n-k}}{\sqrt{(1-r^2_{X_i X_j.X_1X_2...,X_k})}}$$

حيث أن :

$r^2_{ij}$: قـــيمة معـــامل الارتـــباط الجزئي بين المتغيرين المستقلين $X_i$ ، $X_j$ بأعتبار أن بقية المتغيرات المستقلة ثابتة.

وبعـــد احتســـاب قـــيمة $t_{ij}$ تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (n-k) ومستوى معنوية معين لتحديد قبول أو رفض أحد الفرضيتين:

$$H_0 : r_{X_i X_j . X_1 X_2 ..., X_k} = 0$$

$$H_1 : r_{X_i X_j . X_1 X_2 ..., X_k} \neq 0$$

فـــإذا كانـــت القـــيمة المحتسبة أكبر من القيمة الجدولية ترفض $H_0$ وتقبل $H_1$ أي أن الارتـــباط الجزئـــي بين المتغيرين $X_j$، $X_i$ معنوي. وبالعكس فإن الارتباط الجزئي بيـــنهما غير معنوي عندما تكون القيمة المحتسبة أصغر من مثيلتها الجدولية. وتكرر العملـــية لكافة المتغيرات المستقلة في النموذج حتى يتم تشخيص المتغيرات المستقلة التي تسببت في حصول مشكلة التعدد الخطي.

### 3.6.6 اختبار كلاين، KLIEN Test:

يســـتخدم هـــذا الاختبار للكشف عن وجود (التعدد الخطي) حيث يتم مقارنة معامل التحديد $R^2$ مع مربع معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة. فاذا كان معامل الـــتحديد $R^2$ أكـــبر من مربع معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة فهذا يعني عدم وجـــود مشكلة التعدد الخطي وإن كان موجوداً فهذا لا يؤثر أو يكون غير مؤثر. أي أن:

$$R^2 > r^2_{X_i X_j}$$

## 7.6 طرق معالجة مشكلة التعدد الخطي:

1- محاولـــة توســـيع حجـــم العينة وذلك بإضافة بيانات كافية عن متغيرات الظاهرة المدروسة، إذ تزداد التقديرات دقة بزيادة عدد البيانات التي تعتمد عليها في عملية التقدير نظراً لوجود علاقة عكسية بين حجم العينة وقيمة التباين، فكلما كبر حجم العيـــنة كلمـــا تـــم الحصـــول على معلومات إضافية تساعد على تخفيض حجم التباينات.

2- حـــذف المتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة التي تسببت في ظهور المشكلة في الـــنموذج. ولكـــن غالباً ما يستبدل هذا الحل للمشكلة بمشكلة أخرى، إذ أن حذف متغـــير مســـتقل معين له أهميته التفسيرية يوقع الباحث بمشكلة التوصيف (عدم إدخـــال المتغيرات المهمة في النموذج) مما يرفع من احتمال تحيز المقدرات في تلك الحالة.

3. تحويـــل شـــكل الدالة بإستعمال النسب والفروقات عوضاً عن المتغيرات الاصلية. فعلى سبيل المثال النموذج التالي:

$$Y_i = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + U_i$$

يمكـــن اختـــيار احـــد المتغيرات المستقلة ولتكن مثلاً $X_2$ كمقام وتضرب المعادلة بها فنحصل على متغيرات جديدة وكالآتي:

$$\frac{Y_i}{X_2} = B_0\frac{1}{X_2} + B_1\frac{X_1}{X_2} + B_2 + \frac{U_i}{X_2}$$

غـــير أنـــه يلاحظ أن النموذج الجديد قد لا يستوفي أحد فروض OLS الاعتيادية إلا وهو (أنه لا يمتلك تباين ثابت لحدود الخطأ $\frac{U_i}{X_2}$، حيث أن:

$$E\left(\frac{U_i}{X_2}\right)^2 = \frac{E(U_i^2)}{X_2^2} = \frac{\sigma^2}{X_2^2} \neq \sigma^2$$

مما يعني إستبدال المشكلة بمشكلة أخرى.

4- استخدام اسلوب الدمج بين بيانات السلاسل الزمنية والبيانات المقطعية فمثلاً يمكن اســتخدام المعلمـــة المســتخرجة بواسطة البيانات المقطعية مع العلاقة المقدرة بواســطة السلاســـل الزمنية كاستخدام مقدر معلمة الميل الحدي للاستهلاك لفترة معيـــنة ولقطـــر معيـــن مـــن دراسات المقاطع العرضية مع العلاقة بين الدخل والاسعار لنفس الفترة والقطر من دراسات السلاسل الزمنية.

# الأسئلة والتمـــــارين

**السـؤال 1.6:** الجدول التالي يبين السلسلة الزمنية لخمسة متغيرات، $Yi$، $X_1$، $X_2$، $X_3$، $X_4$.

| $Y_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 6.0 | 40.1 | 5.5 | 108 | 63 |
| 6.0 | 40.3 | 4.7 | 93 | 72 |
| 6.5 | 47.5 | 5.2 | 108 | 86 |
| 7.1 | 49.2 | 6.8 | 100 | 100 |
| 7.2 | 52.3 | 7.3 | 99 | 107 |
| 7.6 | 58.0 | 8.7 | 99 | 111 |
| 8.0 | 61.3 | 10.2 | 101 | 114 |
| 9.0 | 62.5 | 14.1 | 97 | 116 |
| 9.0 | 64.7 | 17.1 | 93 | 119 |
| 9.3 | 66.8 | 21.3 | 102 | 121 |

**المطلوب:** اختبار وجود مشكلة التعدد الخطي.

**السؤال 2.6:** ماذا يقصد بمشكلة التعدد الخطي؟ وما هي أنواعه؟ وكيف يتم معالجتها؟

**السـؤال 3.6:** قـام أحد الباحثين بدراسة دالة الطلب على سلعة معينة، Y، فوجد ان هـناك عاملين أساسيين تؤثران فيها هي سعر السلعة ، $X_1$، وسعر سلعة أخرى منافسة، $X_2$، وكما مبين في الجدول أدناه:

| $Y_i$ | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|
| 9 | 1 | 6 |
| 7 | 2 | 6 |
| 5 | 3 | 5 |
| 5 | 4 | 2 |
| 4 | 5 | 1 |

**المطلوب:**

1- تقدير معلمات العلاقة.

2 اختبار وجود مشكلة التعدد الخطي باستخدام إحدى طرق الاختبار المناسبة مع أجراء المعالجات الضرورية في حالة وجود المشكلة.

# الفصل السابع: مشكلة عدم تجانس التباين

## The Heteroscedasticity Problem

1.7 المقدمة.

2.7 طبيعة مشكلة تباين حد الخطأ.

3.7 أسباب تباين حد الخطأ.

4.7 اكتشاف تباين حد الخطأ.

1.4.7 اختبار كولدفيلد وكوانت.

2.4.7 اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.

3.4.7 اختبار بارتليت.

4.4.7 طريقة كليجسر.

5.4.7 اختبار بارك.

5.7 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين.

6.7 الأسئلة والتمارين

# الفصل السابع: مشكلة عدم تجانس التباين
# The Heteroscedasticity Problem

## 1.7 المقدمـــــــــة:

أحد الفرضيات الأساسية التي يقوم عليها النموذج الخطي (العام والبسيط) هو ثـــبات التبايـــن لحـــدود الخطأ (تجانس تباين الخطأ)، Homoscedasticity، لجميع المشاهدات (i)، أي:

$$E\,U_i^2 = \sigma_i^2$$

وفي النموذج الخطي العام فإن الفرض المناظر:

$$E(UU') = \sigma_i^2 In$$

وفي واقع الأمر، فإننا كثيراً ما نواجه حالات يتعسر فيها استيفاء الشرط أعلاه، ومن ثم فان التباين لا يكون ثابتاً بل يختلف لكل مشاهدة من مشاهدات العينة وتصبح لدينا قـــيم مخـــتلفة وغـــير ثابتة لتباينات حدود الخطأ العشوائية، وعليه فإن القطر الرئيس لمصـــفوفة التبايـــن والتباين المشترك الخاصة بحدود الخطأ يحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة، أي إن:

$$E(UU') \neq \sigma_i^2 In$$

حيث إن:

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \ldots \neq \sigma_n^2$$

ويحـــدث هـــذا أساساً في حالة الدراسات المعتمدة على البيانات الإحصائية المقطعية Cross- Section Data ، كمـــا هـــو الحال في بيانات بحوث ميزانية الأسرة التي تشـــمل أُســـراً متبايـــنة بشكل كبير في مستويات دخولها، فتشتت مشاهدات البيانات المقطعية الجزئية الخاصة بالمتغيرالتابع قد يختلف اختلافاً شديداً من مستوى إلى آخر مـــن مســـتويات المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة). فعلى سبيل المثال نجد ان دراســـة دالـــة الاســـتهلاك التـــي تعتمد على دخل وانفاق العوائل على مختلف السلع والخدمـــات، تبين ان تباين الخطأ الخاص بالإنفاق الاستهلاكي لعائلات الدخل المرتفع عـــادة مـــا يكـــون اكبر عنه بالنسبة لتباين الخطأ الخاص بإنفاق العائلات ذات الدخل المنخفض، ذلك ان العوائل ذات الدخول المرتفعة تتمتع بمرونة كبيرة في الأنفاق، أما العوائـــل ذات الدخول المنخفضة فان أنفاقها يقع عادة ضمن حدود ضيقة، وعليه فان التشـــتت ومن ثم التباين عند قيم الدخول ($X_i$) الكبيرة يكون اكبر من التشتت ومن ثم التبايـــن عند قيم ($X_i$) الصغيرة ومن ثم فان فرضية تجانس تباين الخطأ تصبح غير مجديـــة، وخرق الفرض هذا يؤدي إلي ظهور مشكلة تدعى مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ، The Heteroscedasticity problem.

فـــي هـــذا الفصل سوف نختبر سريان مفعول ثبات تباين حد الخطأ، أي أن $E(U_i^2) = \sigma^2$، ومحاولـــة معـــرفة ماذا يحصل إذا لم تتحقق الفرضية تلك. وعليه سنحاول الإجابة على الأسئلة الآتية:

- ما هي طبيعة مشكلة تباين حد الخطأ؟
- ما هي أسباب المشكلة؟
- ما هي الآثار المترتبة على وجود هذه المشكلة؟
- وكيف يمكن اكتشافها ومن ثم أسلوب معالجتها؟

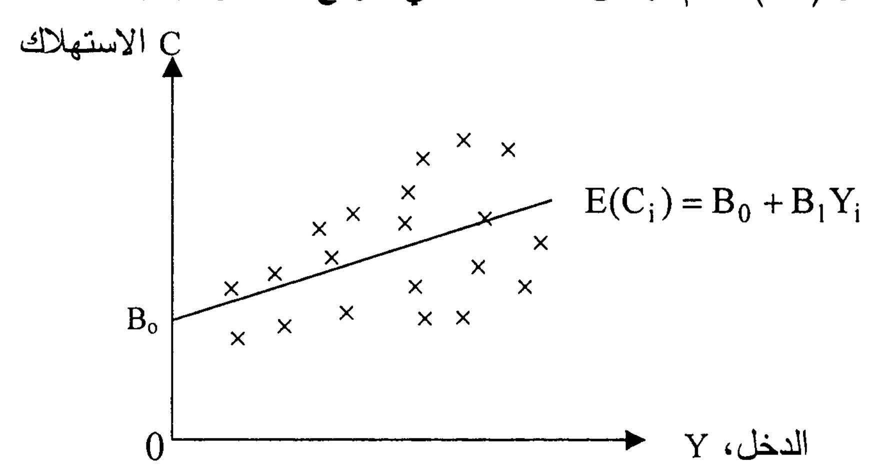
## 2.7 طبيعة مشكلة عدم تجانس حد الخطأ،

**:The Nature of Heteroscedasticity**

إن مشـــكلة تجـــانس الخطأ، Heteroscdasticity، تتكون من كلمتين، هما (Hetero) بمعنى غير متساو و (Scedasticity) بمعنى تباعد او انتشار. فعند تغير قـــيمة تباين حد الخطأ، $U_i$، بحيث تزداد هذه القيمة بزيادة قيمة المتغير المستقل، $Y_i$، فإننا نواجه مشكلة تباين الخطأ.

ويمكن توضيح ذلك بيانياً في نموذج الانحدار البسيط المتضمن متغيرين كما في الشكل (1.7)، الذي يمثل العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي لاسرةٍ ما، $C_i$، ومستوى الدخـــل لتلك الأسرة، $Y_i$، في حالة ثبات حد الخطأ، ويلاحظ من هذا الشكل إذا كانت قيمة تباين حد الخطأ يتغير بتغير قيمة حد الخطأ، $U_i$، بحيث تزداد هذه القيمة بزيادة قـــيمة المتغير المستقل، فإننا نواجه مشكلة تباين حد الخطأ أو عدم تجانس حد الخطأ. وبافـــتراض أننا بصدد دراسة مستوى الاستهلاك لاسرةٍ ما، وقد أخذنا عينة عشوائية مـــن الأســـر حجمهـــا (n) وكان التباين في الاستهلاك يزداد كلما زاد دخل الأسرة، فالأســـر التي تحصل على دخل أعلى يكون لديها مرونة أكبر من الاستهلاك، كما هو واضح في الشكل البياني.

**الشكل (1.7): عدم تجانس حد الخطأ في نموذج الانحدار البسيط**




ويلاحظ من الشكل أعلاه، ان تباين المتغير التابع (C) يزداد كلما زاد مستوى الدخل (Y)، ولذلك نجد ان حساب الأخطاء المعيارية في علاقة الاستهلاك بالدخل وبطريقة OLS، لا يساعدنا في الوصول إلى تقديرات غير متحيزة ومتوافقة، وذلك لان هذه الصيغة تفترض عدم ثبات تباين الخطأ، وبذلك فان اختبار الفرضية المعتمدة على هذه الأخطاء المعيارية تصبح غير سارية المفعول.

لذلك فان المقدرات تصبح غير فعّالة، وبعض طرق التقدير التي نحصل منها على مقدرات غير متحيزة سوف تكون تباينات العينة فيها صغيرة، لذلك إذا كانت البيانات المتوفرة كافية سوف يكون التقدير في هذه الحالة مرضٍ.

لسوء الحظ، ان حساب الأخطاء المعيارية بطريقة OLS، التي تعتمد على الصيغة المنتظمة، تكون غير صحيحة، وذلك بسبب ان هذه الصيغة تفترض عدم ثبات تباين حد الخطأ، Heteroscedasticity، لذلك فان اختبار الفرضية التي تعتمد على الأخطاء المعيارية تصبح غير نافذة.

وتوجد طريقة بديلة لتحديد الأخطاء المعيارية والتي قام بتطويرها "هاربرت وايت" H.WHITE، وتوصلنا هذه الصيغة إلى تقديرات متوافقة لتباين العينة

المدروســـة، وعلى اقل تقدير في العينة الكبيرة، وبذلك فان اختبار الفرضيات بطريقة WHITE تكون جاهزة كاختبار في معظم برامج الحاسوب.

**مـــثال** ذلك، بافتراض دراسة العلاقة بين الادخار، $S_i$، ومستوى الدخل، $Y_i$، للأســـر وذلك باستخدام بيانات المقطع العرضي. وعند تقدير دالة الادخار، Saving Function، والتـــي ربمـــا تعـــرض عـــدم تبايـــن حد الخطأ للسبب نفسه، فان دالة الاستهلاك ربما تكون بصيغة خطية بسيطة، وبافتراض اننا حصلنا على النتائج الآتية:

$$\hat{S}_i = -1.062 + 0.295Y_i \qquad \ldots(1.7)$$

$$Se_1 \quad 0.851 \quad 0.075$$

$$Se_2 \quad (1.233) \quad (0.152)$$

$$R^2 = 0.137 \quad , \quad Se = 4.154$$

ان الأخطاء المعيارية الأولى، $Se_1$، تقترح بان الدخل له أثر معنوي جداً على الادخار وذلك طبقاً لاختبار t المحسوبة $(t_1^* = 3.95)$. أما الأخطاء المعيارية المنقحة، $Se_2$، تكـــون الضعف في الحجم. وان قيمة $t_2^*$ المحسوبة لها تساوي $(t_2^* = 1.95)$ وهي تمـــثل اقل من قيمة $t_1^*$، وان استخدام اختبار ذات طرف واحد يكون ملائم. ومن ثم نحكـــم بـــان الدخل يكون موجب ومعنوي عند مستوى معنوية 5% مع ان العامل لا يكـــون معـــنوياً عـــند إجراء الاختبار ذات الطرفين، ومن ثم فان الأخطاء المعيارية الأولى، $Se_1$، ربما تقود إلى تقييم مضلل.

ولمواجهـــة مشـــكلة تبايـــن حد الخطأ، والإبقاء على صحة الفرضية القائلة باســـتقلالية حـــد الخطـــأ، $U_i$، عـــن المتغير المستقل، $Y_i$، أي: $E(U_i Y_i) = 0$.

وبافتراض ان العلاقة المراد دراستها في نموذج الانحدار البسيط هي:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i \qquad ...(2.7)$$

إذ لابـــد ان نفـــترض ان قـــيمة معـــامل حـــد الخطـــأ تكـــون مساوية للصفر، أي: $E(U_i) = 0$، مهمـــا كانت قيمة المتغير المستقل، $Y_i$، بالنسبة لكل قيمة من قيم $Y$، أي ان متوسط قيم $Y_i$ يساوي كل قيمة من قيم المتغير المستقل $Y$، التي تبدأ من القيمة الأولى، $Y_1$، حتى آخر قيمة لها، $Y_n$، والتي ينتج عنها $E(U_i) = 0$.

ويمكن التعبير عن ذلك بالصيغة الآتية:

$$[AY_i \; , \quad i = 1,2,...,n \quad \Rightarrow E(U_i) = 0] \qquad ...(3.7)$$

ويعنـــي ذلـــك ان متوســـط العلاقة، Average Relationship، بين المتغير التابع، $C_i^A$، والمستقل يمكن كتابتها كما يأتي:

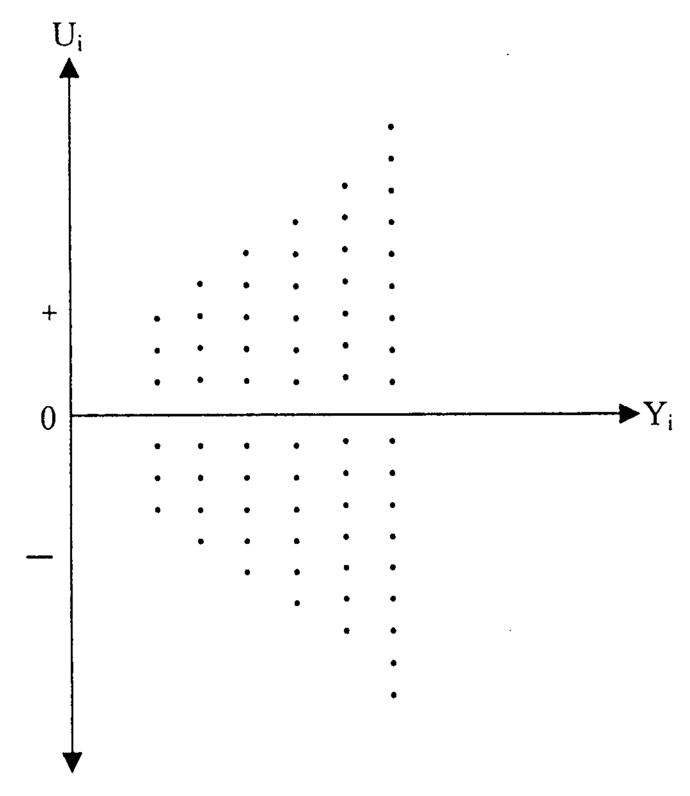
$$C_i^A = B_0 + B_1 Y_i \qquad ...(4.7)$$

معنى ذلك إن معامل حد الخطأ ليس له أي ارتباط بالمتغير المستقل، $Y_i$. وبذلك يمكن كتابة العلاقة بين المتغير التابع وحد الخطأ، وكما يأتي:

$$E(U_i Y_i) = 0$$

ولتوضيح ذلك، نأخذ الشكل البياني (2.7) الآتي:

**الشكل (2.7): العلاقة بين معامل حد الخطأ والمتغير المستقل**



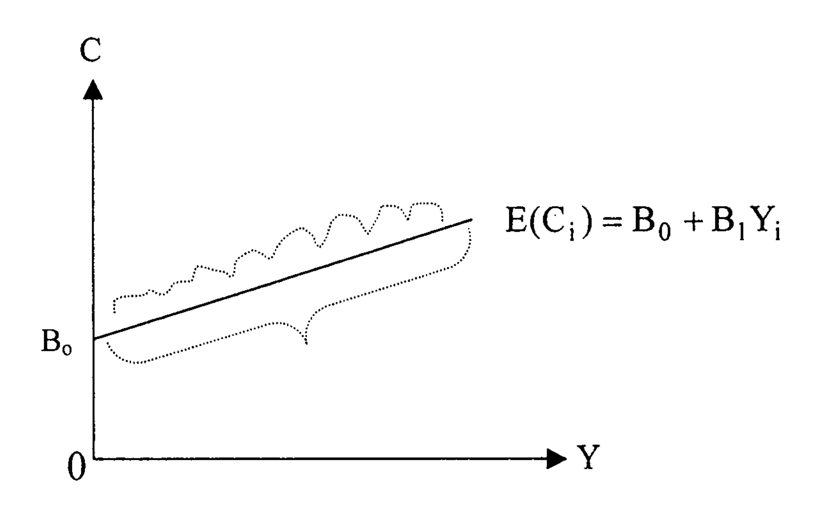

حيث يلاحظ من الشكل (2.7) ان معامل حد الخطأ، $U_i$ يزداد بزيادة المتغير المستقل، $Y_i$، ولكن لا يوجد ارتباط بينهما، وذلك لان قيمة معامل حد الخطأ مساوية، في المتوسط، إلى الصفر. أي ان $E(U_i) = 0$ عن كل قيمة من قيم المتغير المستقل، Y.

أما في حالة ثبات حد الخطأ، $U_i$ وهي أحد أهم افتراضات نموذج الانحدار والذي يكون مشروطاً باختبار قيم المتغيرات المستقلة، فإنه يكون مساوياً إلى $\sigma_i^2$ وهذا يمثل افتراض ثبات تباين الخطأ أو تجانس التباين، Homoscedasticity. ويمكن كتابته بالصيغة الآتية:

$$E(U_i^2) = \sigma_i^2 \qquad , \ (i = 1,2,...,n) \qquad ...(5.7)$$

ويمكــن توضيح ذلك في الشكل البياني (3.7) الذي يوضح العلاقة بين متغيرين هما (C) متغــير تــابع و(Y) متغير مستقل في حالة ثبات تباين حد الخطأ. ويلاحظ من الشكل ان تباين حد الخطأ لا يعتمد على قيم المتغير المستقل، Y.

**الشكل (3.7): ثبات تباين حد الخطأ في نموذج الانحدار البسيط**




## 3.7 أسباب عدم تجانس حد الخطــأ، :The Reasons of Heteroscedasticity

هناك أسباب عدة لظهور هذه المشكلة ومن أهمها ما يأتي:

1- ســلوكية وتصرف الأفراد التي تقل الأخطاء فيها بمرور الزمن، وعليه فان تباين حد الخطأ $(\sigma_i^2)$ يتناقص هو الآخر خلال الفترة الزمنية.

2- يــتزايد تبايــن حــد الخطأ $(\sigma_i^2)$ مع زيادة مستوى الدخل وذلك لتباين وتعدد

اختبارات الناس في سلوكهم، مثال ذلك، تباين الأنفاق على المواد الغذائية بين الأسر يمكن ان يزيد بزيادة دخل الأسرة.

3- مع تحسن أساليب جمع البيانات يقل تباين حد الخطأ $(\sigma_i^2)$ وذلك لان جمع البيانات الدقيقة والواقعية تقلل من الأخطاء، مثال ذلك ان الأخطاء التي ترد في المستندات في المؤسسات الحكومية والتي تستخدم الحاسب الآلي لتحليل البيانات تكون أقل من مثيلتها في المؤسسات التي لا تستخدم الحاسب الآلي.

## 4.7 اكتشاف عدم تجانس حد الخطأ، Detection of Heteroscedasticity:

هناك طرق عدة يمكن بوساطتها اختبار فيما لو كان النموذج يعاني من مشكلة عدم تجانس التباين أم لا، منها:

### 1.4.7 اختبار كولد فيلد وكوانت، GOLDFELD and QUANDT Test:

يعد من الاختبارات المهمة لغرض الكشف عن مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ، ويتم استخدامه في حالة العينات كبيرة الحجم، حيث يتم:

1- ترتيب البيانات الخاصة بالمتغير المستقل، $X_i$، من اصغر قيمة إلى اكبر قيمة.

2- حذف المشاهدات الوسطية من بيانات العينة ويفضل حذف 1/5 المشاهدات.

3- تقسم المشاهدات الباقية إلى عينتين جزئيتين متساويتين تنطوي الأولى على قيم $X_i$ الصغيرة، والثانية على قيم $X_i$ الكبيرة.

4- يتم تقدير معلمات العلاقة الخطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل لكل عينة جزئية على انفراد.

5- يتم احتساب تباين الخطأ للعينة الجزئية الأولى، $S_i^2 1$، وللعينة الجزئية الثانية، $S_i^2 2$ بموجب الصيغة الآتية:

أ. بالنسبة للعينة الجزئية الأولى:

$$S_i^2 1 = \frac{\sum e_i^2}{T_1 - 2} \qquad .....(6.7)$$

حيث ان:

$\sum e_i^2$: مجموع مربعات البواقي في العينة الجزئية الأولى.

$T_1$: حجم العينة الجزئية الأولى.

2 : ثوابت النموذج.

ب. بالنسبة للعينة الجزئية الثانية:

$$S_i^2 2 = \frac{\sum e_i^2}{T_2 - 2} \qquad ....(7.7)$$

6- احتساب إحصاءه *F وفق الصيغة الآتية:

$$F^* = \frac{S_i^2 2}{S_i^2 1} \qquad ....(8.7)$$

فـإذا كانت قيمة *F المحتسبة اصغر من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية قدرها $T_2$-2 للبسط و $T_1$-2 للمقام نأخذ بفرضية العدم التي تنص على عدم وجود المشكلة أي تجانس تباين الخطأ، حيث: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ...\sigma_n^2$.

أمـا إذا كانـت *F المحتسـبة اكبر من قيمة F الجدولية عند نفس مستوى المعنوية ودرجـة الحرية فنأخذ بالفرضية البديلة $H_1$، التي تنص على وجود المشكلة، أي عدم تجانس تباين الخطأ، أي: $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq ... \neq \sigma_n^2$.

**مـثال (1.7):** في ضوء البيانات الإحصائية الآتية التي تبين الأنفاق الاستهلاكي (Y) والدخل القابل للتصرف (X) في اقتصاد إحدى الدول للمدة 1983-1994.

| السنة | Y | X |
|---|---|---|
| 1983 | 26.1 | 38.3 |
| 1984 | 29.3 | 43.5 |
| 1985 | 35.6 | 53.5 |
| 1986 | 39.4 | 60.8 |
| 1987 | 42.7 | 66.4 |
| 1988 | 46.3 | 71.2 |

| السنة | Y | X |
|---|---|---|
| 1989 | 50.1 | 77.2 |
| 1999 | 54.5 | 86.1 |
| 1991 | 60.1 | 94.6 |
| 1982 | 64.9 | 102.4 |
| 1993 | 69.2 | 109.9 |
| 1994 | 73.1 | 115.6 |

**المطلوب:** اختبار عدم تجانس التباين باستخدام اختبار Goldfeld Quandt Test

**الحـــل:**

البيانات الخاصة بالمتغير المستقل ($X_i$) مرتبة في السؤال من اصغر قيمة إلى اكـــبر قـــيمة بالصدفة، تحذف 1/5 المشاهدات ، أي $2.5 = (12)(\frac{1}{5})$ مشاهدة، حيث تحذف المشاهدتين الخاصتين بعامي 1988 و1989 لكي تقسم البيانات إلى مجموعتين جزئيتين متساويتين تضم كلاً منها (5) مشاهدات وكالآتي:

**المجموعـــة الجزئيـــــة الأولى:**

| السنة | Y | X | $y_i$ | $x_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $\hat{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1983 | 26.1 | 38.3 | −8.52 | −14.2 | 120.984 | 201.64 | 26.246075 |
| 1984 | 29.3 | 43.5 | −5.32 | −9.0 | 47.88 | 81.0 | 29.312583 |
| 1985 | 35.6 | 53.5 | 0.98 | 1.0 | 0.98 | 1.0 | 35.209713 |
| 1986 | 39.4 | 60.8 | 4.78 | 8.3 | 39.674 | 68.89 | 39.514618 |
| 1987 | 42.7 | 66.4 | 8.08 | 13.9 | 112.312 | 193.21 | 42.817011 |
| n = 5 | 173.1 | 262.5 | 0 | 0 | 321.83 | 454.74 | 173.1 |

$\overline{Y} = 34.62$

$\overline{X} = 52.5$

| $e_i$ | $e_i^2$ |
|---|---|
| −0.146075 | 0.0213379 |
| −0.012583 | 0.0001583 |
| 0.390287 | 0.1523239 |
| −0.114618 | 0.0131372 |
| −0.117011 | 0.0136915 |
| 0 | 0.2006488 |

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{321.83}{545.74} = 0.589713$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{x}$$

$$\hat{B}_0 = 34.62 - (0.589713)(52.5)$$

$$\hat{B}_0 = 34.62 - 30.5959932$$

$$\hat{B}_0 = 3.660068$$

أذن المعادلة التقديرية، هي:

$$\therefore \hat{Y} = 3.66068 + 0.589713 X_i$$

$$S_1^2 = \frac{\sum e_i^2}{T_1 - 2} = \frac{0.2006488}{5-2} = 0.0668829$$

**المجموعـــة الجزئيـــــة الثانيـــة:**

| السنة | Y | X | $y_i$ | $x_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 54.5 | 86.1 | −9.86 | -15.62 | 154.0132 | 243.9844 | 97.2196 |
| 1991 | 60.1 | 94.6 | −4.26 | −7.12 | 30.3312 | 50.6944 | 18.1476 |
| 1992 | 64.9 | 102.4 | 0.54 | 0.68 | 0.3672 | 0.6424 | 0.2916 |
| 1993 | 69.2 | 109.9 | 4.84 | 8.18 | 39.5912 | 66.9124 | 23.4256 |
| 1994 | 73.1 | 115.6 | 8.74 | 13.88 | 121.3112 | 192.6544 | 76.3876 |
| n = 5 | 321.8 | 508.6 | 0 | 0 | 354.614 | 554.708 | 215.472 |

$\overline{Y} = 64.36$

$\overline{X} = 101.72$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{345.614}{554.708} = 0.6230557$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{x}$$

$$\hat{B}_0 = 64.36 - (0.6230557)(101.72)$$

$$\hat{B}_0 = 64.36 - 63.377225$$

$$\hat{B}_0 = 0.982775$$

أذن المعادلة التقديرية، هي:

$$\hat{Y} = 0.982775 + 0.623055\, X_i$$

$$\sum \hat{y}^2 = \hat{B}_1 \sum xy = 0.6230557(345.61) = 215.33677$$

$$\sum e_i^2 = \sum y^2 - \sum \hat{y}^2$$

$$\sum e_i^2 = 215.472 - 215.3367 = 0.13523$$

$$S_2^2 = \frac{\sum e_i^2}{T_2 - 2} = \frac{0.13523}{5-2} = 0.0450766$$

$$F^* = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0.0450766}{0.0668829} = 0.673963$$

وبمقارنة قيمة *F المحتسبة والبالغة (0.673) مع قيمتها الجدولية البالغة (9.28) عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (3، 3) للبسط والمقام، يتضح بأن *F المحتسبة أقـــل من *F الجدولية، عليه تقبل فرضية العدم $H_0$، والتي تنص على تجانس تباين الخطأ، أي عدم وجود المشكلة .

### 2.4.7 اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، Spearman's Rank Correlation Coefficient Test:

يُعــــــد هــذا الاختبار من أسهل وأبسط الاختبارات المستخدمة في اكتشاف مشكلة عدم تجانس التباين، ويمكن تطبيقه على العينات الكبيرة والصغيرة. يعتمد هذا الاختـــبار علـــى القيم المطلقة لحدود الخطأ (أي إهمال إشارة، $e_i = |e_i|$) وقيم المتغير المستقل موضوع الدراسة. ويتطلب احتساب هذا المؤشر:

1- تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة OLS.

2- احتساب البواقي، $e_i$، $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

3- ترتيب قيم المتغير المستقل ($X_i$) والانحرافات ($e_i$) تصاعدياً أو تنازلياً، وإعطاء كـــل مـــنها رتباً معينة وفق تسلسل القيم ثم تحسب فروقات الرتب، ومن ثم نستخرج معـــامل ارتـــباط الرتب ما بين القيم المطلقة للانحرافات وقيم المتغير المستقل المعني

وفق قانون سبيرمان، Spearman، لارتباط الرتب الآتي:

$$r_s = 1 - \left[ \frac{6 \sum D_i^2}{n(n^2 - 1)} \right] \quad \ldots.(9.7)$$

حيث أن:

n : تمثل حجم العينة.

$D_i$: تمثل الفرق ما بين رتب القيم المطلقة للانحرافات (لحد الخطأ، $|e_i|$) ورتبة المتغير المستقل، $X_i$، المناظرة.

وكلما اقتربت قيمة $r_s$ من الواحد الصحيح دل ذلك على وجود علاقة قوية بين $e_i$ و $X_i$ ومن ثم وجود مشكلة عدم تجانس التباين (وجود علاقة تباين حد الخطأ).

ويمكن التأكد من وجود المشكلة من خلال اختبار t على وفق الصيغة الآتية:

$$t = \frac{r_s \sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - r_s^2}} \quad \ldots.(10.7)$$

- ثم إيجاد قيمة $t^c$ الجدولية وذلك بالبحث عنها في جدول توزيع t في نهاية الكتاب عند درجات حرية (n-k+1) ومستوى معنوية 1% أو 5%.

- إجراء مقارنة بين قيمة *t المحسوبة مع نظريتها قيمة $t^c$ الجدولية، فإذا كانت قيمة $t^c < t^*$ نقبل فرضية العدم، $H_0$، القائلة بوجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ أو التجانس ونرفض الفرضية البديلة.

- أما إذا كانت $t^c > t^*$ نرفض فرضية العدم، $H_0$، ونقبل الفرضية البديلة، $H_1$، القائلة بوجود ثبات مشكلة تباين حد الخطأ.

- وبشـــكل عـــام يمكـــن القول بأنه كلما كانت قيمة معامل ارتباط الرتب ($r_s$) عالية وقريـــبة مـــن الواحد الصحيح، دل ذلك على وجود علاقة قوية بين انحرافات حد الخطأ والمتغير المستقل، ومن ثم يكون هناك وجود علاقة تباين حد الخطأ.

وبالـــرجوع إلـــى بـــيانات المثال (1.7)، الخاص بالأنفاق الاستهلاكي (Y) والدخل القابل للتصرف في اقتصاد أحد الدول للمدة (1983-1994) وبتطبيق معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لاختبار وجود أو عدم وجود مشكلة عدم تجانس التباين تكون:

| السنة | $Y_i$ | $X_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1983 | 26.1 | 38.3 | -38.325 | -23.175 | 888.18187 | 1468.8056 |
| 1984 | 29.3 | 43.5 | -33.125 | -19.975 | 661.67187 | 1097.2656 |
| 1985 | 35.6 | 53.5 | -23.125 | -13.675 | 316.23437 | 534.76562 |
| 1986 | 39.4 | 60.8 | -15.825 | -9.875 | 156.27187 | 250.43062 |
| 1987 | 42.7 | 66.4 | -10.225 | -6.575 | 67.229375 | 104.55062 |
| 1988 | 46.43 | 71.2 | -5.425 | -2.975 | 16.139375 | 29.430625 |
| 1989 | 50.1 | 77.2 | 0.575 | 0.825 | 0.474375 | 0.330625 |
| 1990 | 54.5 | 86.1 | 9.475 | 5.225 | 49.506875 | 89.775625 |
| 1991 | 60.1 | 94.6 | 17.975 | 10.825 | 194.57937 | 323.10062 |
| 1992 | 64.9 | 102.4 | 25.775 | 15.625 | 402.73437 | 664.35062 |
| 1993 | 69.2 | 109.9 | 33.275 | 19.925 | 663.00437 | 1107.2256 |
| 1994 | 73.1 | 115.6 | 38.975 | 23.825 | 928.57937 | 1519.0506 |
| n =12 | $\sum Y_i =$ 591.3 | $\sum X_i =$ 919.5 | $\sum x_i =$ 0 | $\sum y_i =$ 0 | $\sum x_i y_i =$ 4344.6067 | $\sum x_i^2 =$ 7189.0822 |

| $\hat{Y}_i$ | $e_i$ | Rank of $x_i$ | Rank of $e_i$ | $D_i = X_i - e_i$ | $D_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 26.113903 | −0.013903 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 29.256439 | 0.043561 | 2 | 3 | −1 | 1 |
| 35.299778 | 0.300222 | 3 | 7 | −4 | 16 |
| 39.711416 | −0.311416 | 4 | 9 | −5 | 25 |
| 43.095685 | −0.395685 | 5 | 10 | −5 | 25 |
| 45.996488 | 0.303512 | 6 | 8 | −2 | 4 |
| 49.622492 | 0.477508 | 7 | 11 | −4 | 16 |
| 55.001063 | −0.501063 | 8 | 12 | −4 | 16 |
| 60.137901 | −0.037901 | 9 | 2 | 7 | 49 |
| 64.851706 | 0.048294 | 10 | 4 | 6 | 36 |
| 69.38421 | −0.18421 | 11 | 5 | 6 | 36 |
| 72.828913 | 0.271087 | 12 | 6 | 6 | 36 |
| $\sum \hat{Y}_i = 591.3$ | $\sum e_i = 0$ | | | | $\sum D_i^2 = 260$ |

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(260)}{12(12^2 - 1)} = 1 - \frac{1560}{12(144 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1560}{1716}$$

$$= 1 - 0.9090909$$
$$= 0.0909091$$

ولمـــا كانت قيمة $r_s$ تساوي (0.09) يدل ذلك على وجود علاقة ضعيفة بين $e_i$ و $x_i$ ومن ثم عدم وجود مشكلة عدم تجانس التباين. وللتأكد من ذلك يمكن إجراء اختبار t وكالآتي:

$$t = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

$$t = \frac{0.0909091\sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(0.0909091)^2}}$$

$$t = \frac{0.0909091\ (3.1622776)}{\sqrt{1-0.0082644}}$$

$$t = \frac{0.2874798}{0.9958592}$$

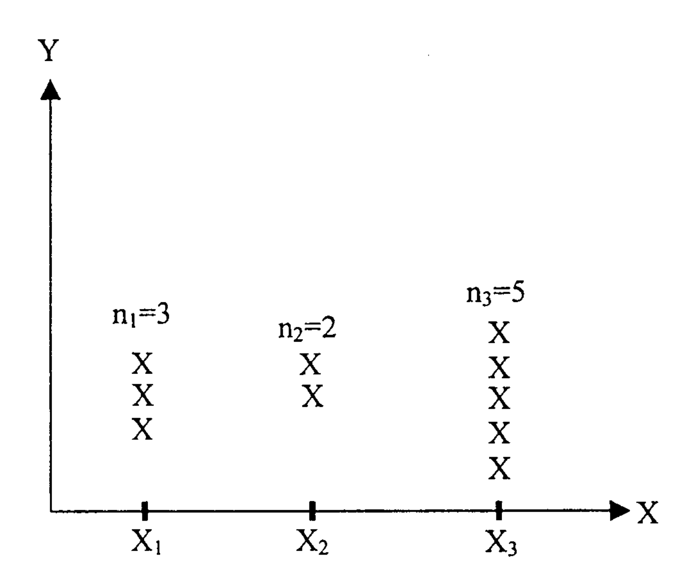
$$t = 0.2886751$$

وبمقارنـــة قيمة $t^*$ المحتسبة البالغة (0.288) مع قيمتها الجدولية $t^c$، البالغة (2.23) عـــند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (10)، يتضح بأن القيمة المحتسبة اقل من القـــيمة الجدولية، عليه تُرفض فرضية العدم، $H_0$، وتُقبل الفرضية البديلة، $H_1$، التي تنص على تجانس تباين الخطأ، أي عدم وجود المشكلة.

### 3.4.7 اختبار بارتليت، BARTLETT Test:

يُستخدم هذا الاختبار في حالة توفر اكثر من مشاهدة لكل قيمة من قيم المتغير المستقل (X) كما مبين في الشكل 4.7:

**الشكل 4.7: اختبار بارتليت**




يتضـــح مـــن الشـــكل السابق بان المتغير المستقل، $X_i$، أخذ ثلاث مستويات وهناك مشـــاهدات عديدة لكل مستوى، فمثلاً هناك 3 مشاهدات عند المستوى $X_1$ ومشاهدتين عـــند المستوى $X_2$ و5 مشاهدات عند المستوى $X_3$. فلو رمزنا لعدد المشاهدات عند كـــل مســـتوى مـــن المستويات (i) بالرمز $(n_i)$ ، حيث $(i=1,2,\ldots,m)$ ومنه يكون المجمـــوع الكلي لمشاهدات العينة مساوياً إلى $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$ ، عليه يمكن إعادة صياغة النموذج الخطي البسيط وبدون إحداث أي تغير في الجوهر على النحو الآتي:

$$Y_{ij} = B_0 + B_1 X_{ij} + U_{ij} \quad .....(11.7)$$

حيـــث $(j=1,2,...,n_i)$ وهي عبارة عن رقم المشاهدة عند مستوى معين من مستويات المتغير المستقل $X_i$. فمثلاً عند المستوى $X_1$ تكون $(j=1,2,3)$ أي $(n_1=3)$.

ومحـــتوى اختـــبار بارتليت هو تجزئة العينة المدروسة إلى عدد من العينات الجزئـــية ولتكن (m)، ومن ثم احتساب تباين الخطأ لكل عينة جزئية $(S_i^2)$ بمستوى معنوية معين ودرجة حرية $(n_i)$ للتأكد من احتمالية انسحاب هذه العينات الجزئية من مجتمع معين، فإذا قبلت فرضية العدم الآتية:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2$$

أي:

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2$$

دلّ ذلـــك إن العينات مسحوبة من مجتمع واحد (متجانس)، أي ان تباين الخطأ ثابت. وبالعكس في حالة قبول الفرضية البديلة:

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq ... \neq \sigma_n^2$$

أو:

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma^2$$

أي ان تباين الخطأ غير ثابت.

ولإجراء اختبار بارتليت، نتبع الخطوات الأساسية الآتية:

- احتساب $Q/L$، حيث ان:

$$Q = N\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i S_i^2}{N}\right) - \sum_{i=1}^{m} n_i \log S_i^2 \qquad .....(12.7)$$

$$L = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n}\right) \qquad .....(13.7)$$

حيث إن:

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 \qquad .....(14.7)$$

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n_i} Y_{ij} \qquad .....(15.7)$$

والمقـــدّر Q / L يـــتوزع بصورة مقاربة إلى توزيع $\chi_{m-1}^2$ (Chi-Square) بدرجة حرية (m-1) ومستوى معنوية معين. فإذا كانت:

$$Q/L \le \chi_{m-1}^2$$

تقـــبل فرضـــية العـــدم، أي أن تبايـــن الخطـــأ المحسوب من العينات الجزئية ثابت (متساوي).

أما إذا كانت:

$$Q/L \ge \chi_{m-1}^2$$

فيقـــبل الفـــرض الـــبديل، أي ان تبايـــن الخطأ المحسوب من العينات الصغيرة غير متجانس، أي وجود مشكلة عدم تجانس التباين.

### 4.4.7 طريقة كليجسر، GLEJSER Method:

يعتمد هذا الاختبار على شكل العلاقة بين الانحرافات العشوائية والمتغير المستقل الذي تعتمد عليه تلك الانحرافات، حيث يتم:

1- تقدير معلمات العلاقة الخطية ومن ثم أيجاد قيم الانحرافات الناتجة من الفرق بين القيم الحقيقية والتقديرية للمتغير التابع.

2- أخذ القيمة المطلقة للبواقي، $|e_i|$، كمتغير تابع في الانحدار، حيث يكون المتغير المستقل هو $X_i$ الذي نعتقد بارتباطه مع $\sigma_i^2$، ومن الأمثلة على مثل هذه الصيغ:

$$|e_i| = B_0 + B_1 X_i$$

$$|e_i| = B_0 + B_1 \sqrt{X_i}$$

$$|e_i| = B_0 + B_1 / X_i$$

3- اختبار معنوية معلمات العلاقة المقترحة، $B_0$ و $B_1$، من الناحية الإحصائية. فإذا أعطت إحدى الصيغ أعلاه قيماً جوهرية لمعلمات الانحدار عندئذٍ يجب تحويل متغيرات النموذج وفقاً للصيغة المذكورة. بعبارة أخرى، يمكن عن طريقها تحديد صيغة العلاقة بين الأخطاء العشوائية والمتغير المستقل.

### 5.4.7 اختبار بارك، PARK Test:

للكشف عن مشكلة تباين الخطأ نستخدم اختبار بارك كما يلي:

بافتراض ان نموذج الانحدار البسيط المراد تقديره في عملية الاختبار هو:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i \quad , \ (i = 1,2,...,n) \qquad ...(16.7)$$

وان:

$n$ : تمثل عدد المشاهدات.

$C_i$ : تمثل القيمة الفعلية للأنفاق الاستهلاكي.

$Y_i$ : تمثل القيمة الفعلية لمستوى الدخل.

$B_0$، $B_1$: تمثل معلمات النموذج المراد تقديره.

ولاستخدام اختبار بارك في اكتشاف مشكلة تباين حد الخطأ نتبع ما يأتي:

- تطبيق طريقة OLS لتقدير معاملات النموذج، ونحصل على:

$$\hat{C}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 Y_i + e_i \qquad ...(17.7)$$

- للحصول على القيم المقدرة لحد الخطأ، $e_i$، من المعادلة أعلاه، كما يأتي:

$$e_i = C_i - \hat{C}_i \qquad ...(18.7)$$

- لتطبيق طريقة OLS في إجراء انحدار $\ln e_i^2$ على $\ln Y_i$ نحصل على:

$$\ln e_i^2 = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \ln Y_i \qquad ...(19.7)$$

- تحسب قيمة *t المحتسبة بالنسبة للمعامل b وكما يأتي:

$$t^*_{\hat{b}} = \frac{\hat{b}}{se\hat{b}} \qquad ...(20.7)$$

حيث ان:

$$se\hat{b} = \sqrt{var\,\hat{b}}$$

وان:

$$var\,\hat{b} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum Y_i^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

وان انحرافات $y_i$ عن الوسط الحسابي هي:

$$y_i = y_i - \overline{Y}$$

وان درجات الحرية، $(df = n- k +1)$.

- نجـــــد قيمـــــة $t^c$ الجدولية ثم نقارنها مع نظريتها $t^*$ المحسوبة عند درجات حرية $(n - k + 1)$.

إذا كانت $t^c < t^*$ نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل القائل ان $b \neq 0$، ويقال عندئذ إن قيمة المعامل b يكون معنوي إحصائياً. ويدل ذلك على وجود مشكلة تباين حد الخطأ، والعكس إذا كانت $t^c > t^*$ عدم وجود مشكلة تباين حد الخطأ.

## 5.7 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين:

كما بيّنا سابقاً إن خرق فرضية ثبات التباين لحدود الخطأ يؤدي إلى وجود قيم مخـــتلفة وغـــير ثابـــتة لتبايـــنات حدود الخطأ العشوائية، ومن ثم فان القطر الرئيس لمصـــفوفة التبايـــن والتباين المشترك الخاصة بحدود الخطأ يحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة، أي ان:

$$E(U_iU_j) \neq \sigma^2 In$$

حيث ان:

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \ldots \neq \sigma_n^2$$

وتتمثل معالجة مشكلة عدم تجانس التباين في المجتمعات الفرعية بتحديد الأوزان ومن ثـم استخدام هذه الأوزان في تحويل صيغة النموذج إلى صيغة أخرى ينتج عنها قيم متساوية في قطر المصفوفة $\sigma^2 In$. ولتحقيق هذا الفرض توجد طرق مختلفة منها:

1- عندما يزداد تباين المتغير التابع، $Y$، بشـكل تناسبي مع قيمة الوسط الحسابي، $\bar{X}$، فإنه يمكن تحويل المتغيرات التي تعاني من مشكلة عدم تجانس التباين من خلال قسمة طرفـي المعادلـة $Y_i = B_0 + B_1X_i + U_i$ علـى المتغير المستقل، $X_i$، وكما في الصيغة الآتية:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{B_0}{X_i} + B_1\frac{X_i}{X_i} + \frac{U_i}{X_i}$$

مع ملاحظة إن الحد الثابت في المعادلة الرئيسة $B_0$ أصبح يمثل معامل الانحدار، أي $B_1$. وان $B_1$ أصبح يمثل الثابت، مما يجعل معامل التحديد $R^2$ مختلف في المعادلتين، لاختلاف قيم المتغير التابع، $Y_i$ في الأولى و $\frac{Y_i}{X_i}$ في الثانية:

2- عـندما يـزداد تبايـن المتغير التابع، $Y_i$، بشكل تناسبي مع الزيادة في $X_i$ فتتم عملية التحويل بقسمة طرفي معادلة الانحدار على $\sqrt{X_i}$، أي:

$$Y_i = B_0 + B_1X_i + U_i$$

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{B_0}{\sqrt{X_i}} + B_1\frac{X_i}{\sqrt{X_i}} + \frac{e_i}{\sqrt{X_i}}$$

هنا العلاقة بين المتغيرين $X_i$ و $Y_i$ اصبح علاقة بين ثلاث متغيرات $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$، $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$، .

$\sqrt{X_i}$، علمـــاً بـــأن قيمة الثابت بعد التحويل تصبح صفر، كما وان قيمة $R^2$ تصبح اكبر، مما يجعل تقدير القيمة المتوقعة للمتغير التابع، Y، غير دقيقة.

## الأسئلة والتمـــــــارين

**السـؤال 1.7:** يعطـي الجدول الآتي بيانـــات كل من $X_i$ ، $e_i$ والمطلوب استخدام معـامل ارتـباط الرتب لسـبيرمان في اكتشـاف مشـكلة عدم تجانس التباين علماً ان $t_{5\%} = 0.549$ .

| التسلسل | $X_i$ | $e_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 12.4 | 1.017 |
| 2 | 14.4 | 1.260 |
| 3 | 14.6 | 0.181 |
| 4 | 16.0 | 0.202 |
| 5 | 11.3 | 0.221 |
| 6 | 10.0 | 0.602 |
| 7 | 16.2 | 0.908 |
| 8 | 10.4 | 0.110 |
| 9 | 13.1 | 0.077 |
| 10 | 11.3 | 0.038 |

**السؤال 2.7:** إذا أعطيت الصيغة التقديرية الآتية:

$$\hat{Y}_i = 5.25 - 0.42X_i$$

علماً بأن كل من $Y_i$ ، $X_i$ أخذت المشاهدات الآتية:

| التسلسل | $Y_I$ | $X_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 |
| 2 | 4 | 1 |
| 3 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 3 |
| 5 | 4 | 2 |
| 6 | 5 | 4 |
| 7 | 3 | 5 |
| 8 | 2 | 6 |

احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب.

**السؤال 3.7:** باستخدام عينة عشوائية مكونة من (12) عائلة توصل باحث اقتصادي إلـــى البـــيانات الآتـــية فيما يخص بمتغيرين، الدخل Y والادخار S بآلاف الدنانير.

| التسلسل | الدخل، Y | الادخار، S |
|---|---|---|
| 1 | 30.5 | 2.6 |
| 2 | 26.0 | 2.2 |
| 3 | 18.0 | 1.5 |
| 4 | 42.5 | 4.0 |
| 5 | 30.0 | 2.7 |
| 6 | 28.0 | 2.9 |
| 7 | 27.5 | 2.6 |
| 8 | 32.5 | 3.0 |
| 9 | 35.0 | 3.2 |
| 10 | 26.0 | 2.7 |
| 11 | 27.5 | 2.2 |
| 12 | 39.0 | 3.4 |

**المطلوب:**

- قدر دالة الادخار للعينة.
- استعمل اختبار كولد فيلد وكوانت للتحقق من وجود مشكلة عدم تجانس التباين.

# الفصل الثامن: نمـــاذج المعـــادلات الآنيـــــة
## Simultaneous Equations Models

**1.8 طبيعة المعادلات الآنية.**

**2.8 مشكلة التحيز الآني.**

**3.8 نماذج المعادلات الآنية في النظرية الاقتصادية.**

1.3.8 نموذج العرض والطلب.

2.3.8 النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي.

3.3.8 نموذج فيلبس الأجر النقدي–السعر.

**4.8 الشكل المختزل.**

**5.8 تقدير نموذج المعادلات الآنية.**

1.5.8 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، ILS.

2.5.8 طريقة المتغيرات المساعدة، IV.

3.5.8 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين، TSLS.

**6.8 الأســــئلة والتماريـــــن.**

# الفصل الثامـــن: نمـــاذج المعـــادلات الآنيـــة
# Simultaneous Equations Models

## 1.8 طبيعـــة المعادلات الآنيـــة:

كـــان التركـــيز فـــيما تقدم من الفصول على نماذج المعادلة المنفردة، والذي يفـــترض بـــأن هناك اتجاهاً وحيداً للسببية بين متغير أو متغيرات مستقلة إلى متغير تـــابع. ولكن هذه العلاقة السببية لا تكون كذلك دائماً، فقد تكون باتجاهين من المتغير المســـتقل (أو المتغـــيرات المستقلة) إلى المتغير التابع، وكذلك من المتغير التابع إلى المتغـــير أو المتغـــيرات المســـتقلة. وهذا التأثير المتبادل يجعل الفرض الذي يتعلق باستقلال المتغير العشوائي عن المتغير المستقل غير صحيح، أي ان:

$$E(X_i\, U_i) \neq 0$$

ومن ثم فإن مقدرات OLS ستكون متحيزة وغير متسقة.

ان وجود تأثير ذو اتجاهين في الدالة يعني بحد ذاته ضرورة وجود معادلتين أو مجموعة من المعادلات لوصف العلاقة بين متغيرين، فالمتغير التابع في معادلة أولى قـــد يوجد ضمن مجموعة المتغيرات المستقلة في معادلة ثانية. وعند ذلك يؤدي دوراً مـــزدوجاً إذ يكون هو الأثر (تابع) في المعادلة الأولى والمؤثر (مستقل) في المعادلة الثانية. ان هذا النظام في وصف التأثير المتبادل بين المتغيرات يسمى بنظام المعادلات الآنية، Simultaneous Equations System.

وبشـــكل عام يمكن تعريف منظومة المعادلات الآنية بأنها عبارة عن مجموعة معـــادلات يكـــون فيها المتغير التابع لواحد أو اكثر من معادلاتها متغيراً مستقلاً في معادلـــة او اكثر ضمن تلك المجموعة. وان المتغيرات التابعة في تلك المجموعة من المعادلات تسمى بالمتغيرات الداخلية، Endogenous variables، حيث يقابل كل متغير داخلـــي في المنظومة معادلة واحدة وبهذا فان عدد المعادلات في منظومة المعادلات الآنية ينبغي ان يساوي عدد المتغيرات الداخلية. أما المتغيرات الخارجية، Exogenous variables، فـــان عددها يكون غير محدداً، إذ لا توجد قيود تحدد عدد هذه المتغيرات وإنمـــا يتوقف ذلك على طبيعة العلاقة بين مختلف معادلات المنظومة، وكمثال على نموذج آني مبسط نأخذ النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي وكما يلي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t \quad \ldots(1.8)$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad \ldots(2.8)$$

حيث ان:

$C_t$: تمثل الأنفاق الاستهلاكي في الفترة الزمنية t .

$Y_t$: تمثل الدخل في الفترة الزمنية t .

$I_t$: تمثل الاستثمار في الفترة الزمنية t .

$B_0, B_1$: تمثل معالم دالة الاستهلاك.

$U_t$: تمثل المتغير العشوائي.

وإذا مـــا نظرنا إلى النموذج السابق نجد ان الاستهلاك، $C_t$، والدخل، $Y_t$، في المعادلة الأولى متغيران داخليان ويحدد أحدهما الآخر، أما المعادلة الثانية فهي معادلة تعريفية

أو متطابقة الدخل القومي، ولا تتضمن أي متغيرات عشوائية كما لا تتضمن معلمات مجهولـــة وان $I_t$ الاستثمار هو متغير خارجي يجري تحديده من خارج النموذج. ومن ناحـــية أخـــرى فأن المعادلة الأولى من النموذج هي التي تمثل دالة الاستهلاك وهي معادلـــة سلوكية او هيكلية تصف سلوك المستهلك، إذ توضح اعتماد $C_t$ على $Y_t$ وان مـــيل المعادلة هو $B_1$ الذي يمثل الميل الحدي للاستهلاك ويكون موجب وذلك بسبب العلاقـــة الطردية بين الأنفاق الاستهلاكي كمتغير تابع ومستوى الدخل كمتغير مستقل أي إذا زاد الدخل يترتب عليه زيادة في الاستهلاك ولكن ليست كل الزيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك بل يذهب جزء منها إلى الادخار وان $U_i$ تمثل بقية العوامل التي تؤثـــر على الاستهلاك وغير داخلة في النموذج كأسعار الفائدة وتوزيع الدخل،...الخ. ومـــن ثـــم فـــان التغير في أي من هذه العوامل سوف يترتب عليها تغير في المتغير العشوائي، $U_i$، ومن ثم انتقال دالة الاستهلاك وتغير مستوى الدخل، $Y_i$، وبذلك يكون هـــناك ارتـــباط بيـــن المتغير المستقل، $Y_t$، والمتغير العشوائي، $U_i$، وعليه لا يمكن اســـتخدام طـــريقة OLS فـــي حل النموذج، فإذا طبقت طريقة OLS العادية على كل معادلـــة مـــن المعـــادلات الآنية أعلاه برغم انتفاء الشروط اللازمة لتطبيقها فإن ذلك ســـيقود إلـــى مقدرات متحيزة وغير متسقة ويشار إلى ذلك بتحيز المعادلات الآنية. ويمكن توضيح ذلك في الفقرة الآتية.

## 2.8 مشكلة التحيز الآني:

لبيان مشكلة التحيز الآني في نموذج تحديد الدخل الكينزي السابق فإننا نشتق الصورة المختزلة للنموذج وعلى النحو الآتي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t \qquad ...(1.8)$$

$$Y_t = C_t + I_t \qquad ...(2.8)$$

وبالـــتعويض عن قيمـــــة $C_t$ بما يســـــاويها في المعادلة (1.8) من المنظومة أعلاه فأن:

$$Y_t = (B_0 + B_1 Y_t + U_t) + I_t \qquad ...(3.8)$$

وبإعادة ترتيب الحدود:

$$Y_t - B_1 Y_t = B_0 + I_t + U_t \qquad ...(4.8)$$

$$Y_t (1 - B_1) = B_0 + I_t + U_t \qquad ...(5.8)$$

$$\therefore Y_t = \frac{B_0}{1 - B_1} + \frac{I_t}{1 - B_1} + \frac{U_t}{1 - B_1} \qquad ...(6.8)$$

يتبيـــن من الصيغـــــة (6.8) ان الدخل، $Y_t$، دالة في عنصر الخطأ لدالة الاستهلاك، أي ان:

$$Cov = (Y_t \ U_t) \neq 0$$

وذلك لأن:

$$Cov = (Y_t \ U_t) = E[Y_t - E(Y_t)][U_t - E(U_t)]$$

وبما أن:

$$E(U_t) = 0$$

فإن:

$$Cov(Y_t\ U_t) = E\left[[Y_t - E(Y_t)]\ U_t\right]$$

وبالتعويض عن توقع $Y_t$:

$$Cov(Y_t\ U_t) = E\left[Y_t - E\left(\frac{B_0}{1-B_1} + \frac{I_t}{1-B_1} + \frac{U_t}{1-B_1}\right)\right][U_t]$$

وبالتعويض عن $Y_t$:

$$Cov(Y_t\ U_t) = E\left[\left(\frac{B_0}{1-B_1} + \frac{I_t}{1-B_1} + \frac{U_t}{1-B_1}\right) - \left(\frac{B_0}{1-B_1} + \frac{I_t}{1-B_1}\right)\right][U_t]$$

وبعد الاختصار والترتيب، نحصل:

$$Cov(Y_t\ U_t) = E\left[\frac{1}{1-B_1} U_t . U_t\right]$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة، بعد الترتيب، كما يلي:

$$Cov(Y_t\ U_t) = \left(\frac{1}{1-B_1}\right) E(U_t^2)$$

$$Cov(Y_t\ U_t) = \frac{1}{1-B_1} \sigma^2 U \neq 0$$

ويـــناقض ذلـــك الفـــرض الخاص بـــ OLS والذي يؤكد على عدم ارتباط المتغيرات المســـتقلة مع العنصر العشوائي. فالمتغير الداخلي $Y_t$ يؤدي دور المتغير المستقل في معادلـــة الاســـتهلاك الهيكلية إلا انه يرتبط بالعنصر العشوائي $U_t$. حيث يترتب عند تطبيق OLS على تلك المعادلة الحصول على مقدرات متحيزة وغير متسقة.

لذا يستوجب اللجوء إلى طرق أخرى أهمها:

- طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، Indirect Least Squares (ILS).
- طريقة المتغير الاداتي، Instrument Variable (IV).
- طريقة الإمكان الأعظم، Maximum Likelihood Method.
- طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS) **Two Stage Least Squares**.

وســـيتم الـــتطرق إلـــى بعض هذه الطرق في مبحث لاحق بعد دراسة نماذج المعادلات الآنية في النظرية الاقتصادية.

## 3.8 نماذج المعادلات الآنية في النظرية الاقتصادية:

### 1.3.8 نموذج العرض والطلب، Supply and Demand Model:

يتكون نموذج الطلب والعرض على سلعةٍ ما من المعادلات الآتية:

$$Q_d = B_o + B_1 P + U_1 \quad , \; (B_1 < 0) \qquad \ldots(7.8)$$

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + U_2 \quad , \; (\alpha_1 > 0) \qquad \ldots(8.8)$$

وعند التوازن تتساوى الكمية المطلوبة والمعروضة $Q_d$ و$Q_s$ من تلك السلعة في السوق حيث ان:

$$Q_d = Q_s \qquad \ldots(9.8)$$

عندما:

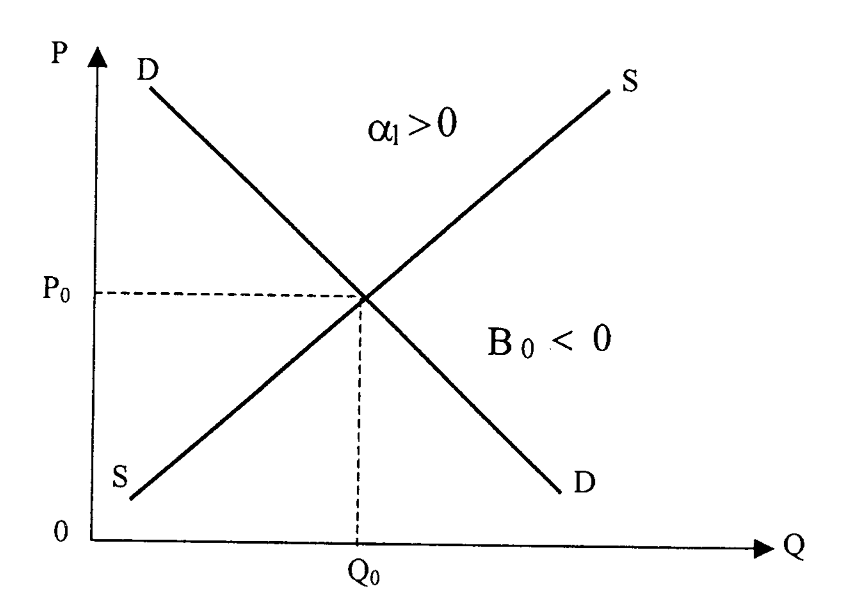
$P$: تمثل سعر تلك السلعة.

$U_2, U_1$: تمثل المتغير العشوائي لدالة الطلب والعرض على التوالي.

$B_1, B_0, \alpha_1, \alpha_0$: تمثل معلمات النموذج.

أما التمثيل البياني للنموذج فهو كما في بالشكل (1.8).

**شكل (1.8): نموذج توازن السوق**

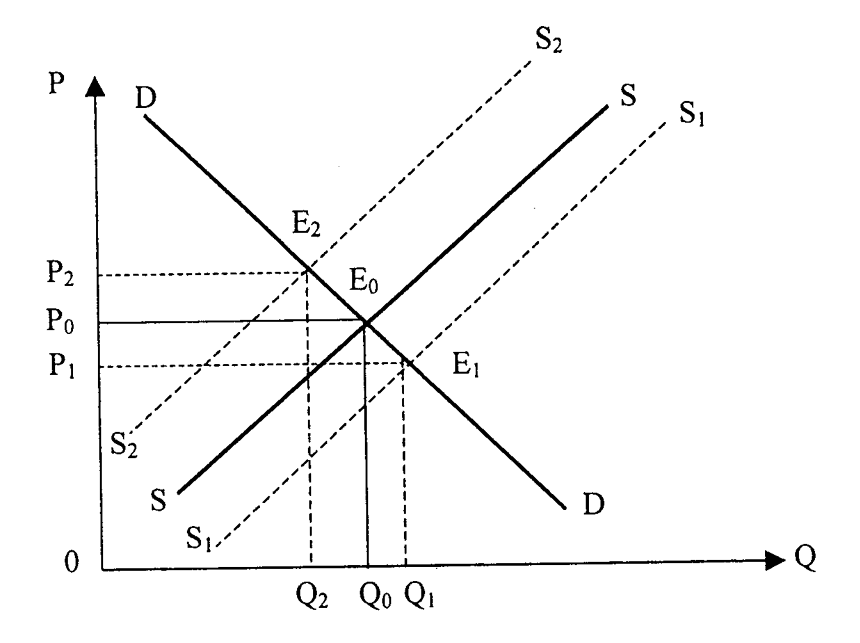



ومن الشكل السابق يمكن ملاحظة ما يأتي:

- أن SS يمثل منحني العرض و DD يمثل منحني الطلب و $P_0$ و$Q_0$ يمثلان السعر والكمية التوازنية في السوق على التوالي. وان كلا المنحنيين يأخذان شكل خط مستقيم أي بمعنى ان النموذج خطي.
- أن جميع متغيرات النموذج هي متغيرات داخلية، وذلك لأن الكمية المطلوبة والمعروضة تتحدد بالسعر في حالة تقاطع المنحنيين في السوق، ولكن هناك

بعـــض الآثار لتغيرات كل من ظروف العرض والطلب على تحديد توازن السوق. ويمكن تلخيصها بالشكل البياني (2.8).

**شكل (2.8): تغير ظروف العرض مع ثبات الطلب**




فـــإذا بدأنا من الوضع التوازني في السوق، فما هو أثر تغيرات ظروف العرض على توازن السوق مع افتراض ثبات منحنى الطلب؟

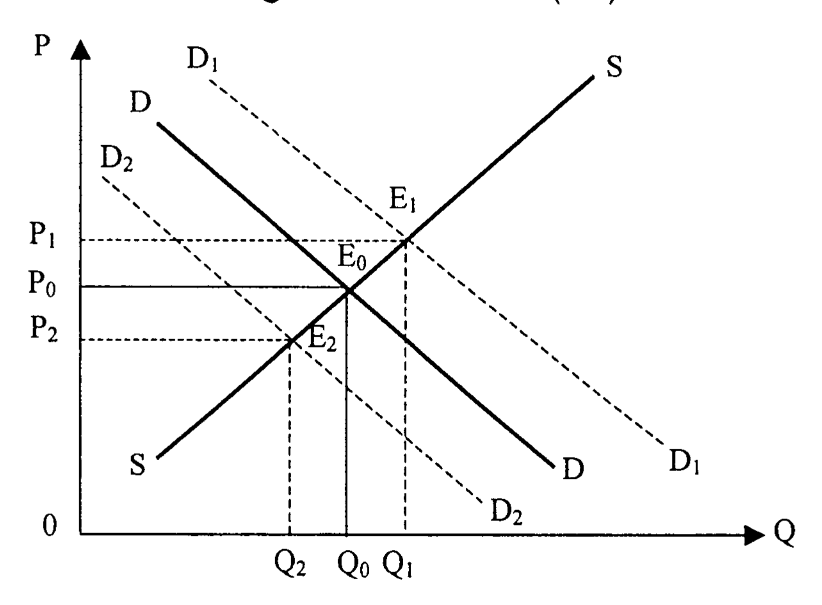
يلاحظ من الشكل (2.8) ان حدوث تغير في ظروف العرض مع ثبات ظروف الطلب ناتج من تغير أحد العوامل، التي افترضتها النظرية الاقتصادية ثابتة، مع تغير الســعر، وهــذه العوامل هي تغير المستوى الفني وتكاليف الإنتاج والقيود المفروضة علـــى الواردات،...الخ. ويترتب على تغير هذه العوامل انتقال لكامل منحنى العرض الى اليمين او إلى اليسار في حالة الزيادة والنقصان على التوالي. فعند تحسن المستوى

الفنـــي للإنـــتاج سوف يؤدي إلى انتقال منحنى العرض إلى جهة اليمين وانتقال نقطة الـــتوازن مـــن الـــنقطة ($E_0$) إلى نقطة توازن جديدة هي ($E_1$) نتيجة انخفاض السعر التوازنـــي مـــن $P_o$ إلـــى $P_1$، حيث يترتب عليها زيادة في الكميات التوازنية من تلك السلعة في السوق. أما في حالة رداءة المستوى الفني المستخدم ينتقل منحنى العرض إلى الأعلى مسبباً انخفاض في الكميات التوازنية وزيادة في السعر التوازني مع انتقال نقطـــة التوازن إلى ($E_2$) وبالتالي سوف يسقط الافتراض القائل بعدم وجود علاقة بين المتغـــيرات المســـتقلة والمتغير العشوائي ومن ثم لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير المعادلة (8.8).

وبطـــريقة مماثلة، فان التغير في ($U_i$) يؤدي إلى حدوث تغير في المتغيرات الأخـــرى التـــي تؤثر على الكمية المطلوبة التي لم تدخل في نموذج الطلب مثل دخل المستهلك، وذوقه، وأسعار السلع الأخرى (البديلة او المكملة)، ومن ثم فان التغير في أي مـــن العوامـــل أعلاه سوف يترتب عليه تغير في المتغير العشوائي ($U_i$) وبالتالي انـــتقال لمنحـــنى الطلب إلى اليمين أو إلى اليسار بالزيادة والنقصان مسبباً تغيراً في السعر والكمية التوازنية.

ومـــن ناحية أخرى ما هو اثر تغيرات ظروف الطلب على توازن السوق مع بقاء العرض ثابتاً. للجواب على ذلك يمكن الاستعانة بالشكل البياني (3.8) وكما يأتي:

**شكل (3.8): تغير ظروف الطلب مع ثبات العرض**




فإذا ازداد الدخل النقدي للمستهلك، على سبيل المثال، سيترتب على ذلك انتقال منحنى الطلـــب إلى جهة اليمين من (DD) إلى ($D_1D_1$)، وانتقال نقطة التوازن من ($E_0$) إلى ($E_1$). حيـــث يتـــبع ذلك زيادة الكمية التوازنية إلى ($Q_1$) وانتقال السعر التوازني إلى ($P_1$). ويترتـــب علـــى ذلك بأن ($U_1$) سوف تكون موجبة أي ان ($U_i > 0$)، والعكس يحصـــل إذا انخفض دخل المستهلك، لان منحنى الطلب سوف ينتقل إلى جهة اليسار مـــن (DD) إلى ($D_2D_2$) نتيجة انتقال السعر التوازني إلى ($P_2$) والكمية التوازنية إلى ($Q_2$). ويترتـــب عليه ان يكون المتغير العشوائي سالب، أي ان ($U_i < 0$) ، وبذلك لا يمكـــن تطبـــيق طـــريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) في تقدير معادلة الطلب (7.8).

من المثال أعلاه، يمكن ملاحظة ان هناك علاقة معتمدة تداخلية بين (Q) و(P) من ناحية، وبين المتغير العشوائي ($U_i$) والسعر (P) من ناحية ثانية، وبين ($U_2$) و($P_1$) من ناحية أخرى. ولذلك فان أحد افتراضات الانحدار الخطي سوف تسقط، ويتمثل هذا الافتراض بعدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي.

### 2.3.8 النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي:

باستخدام الصيغة البسيطة لكينز في تحديد مستوى الدخل القومي، وذلك بأخذ دالة الاستهلاك والدخل القومي كما يأتي:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i \qquad \ldots (10.8)$$

$$Y_i = C_i + I_i + G_i \qquad \ldots (11.8)$$

حيث ان: $0 < B_1 < 1, \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$

وان:

C: تمثل الأنفاق الاستهلاكي
Y: تمثل الدخل القومي
← المتغيرات الداخلية في النموذج

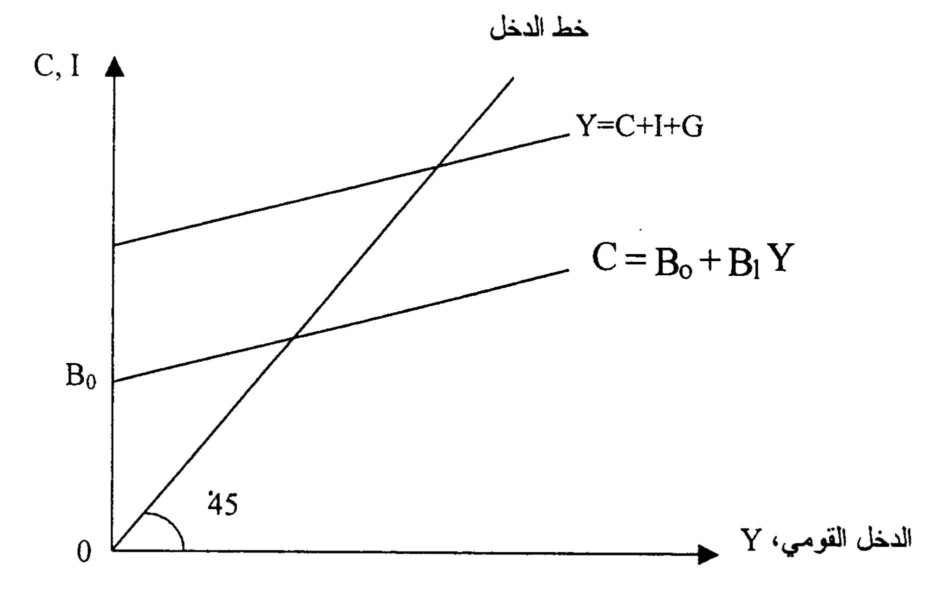
I: تمثل الاستثمار
G: تمثل الأنفاق الكلي
← المتغيرات الخارجية في النموذج

U: تمثل المتغير العشوائي

$B_0$ و $B_1$: تمثل معاملات النموذج

ويجـــب ملاحظـــة ان المعادلة (11.8) فيها متغيرين خارجيين ومتغيرين داخليين في نظام المعادلات الآنية، الذي يمكن وصفهُ بشكل بياني كما في الشكل (4.8).

**شكل (4.8): نموذج كينز في تحديد الدخل القومي**




حيـــث يلاحظ من الشكل أعلاه، ان ميل المعادلة (10.8) هو $B_1$ ويمثل الميل الحدي للاســـتهلاك Marginal Propensity to Consume (MPC)، أو مـــيل دالـــة الاستهلاك ويكون موجب، أي أن $(B_1 > 0)$ وذلك بسبب العلاقة الطردية بين الأنفاق الاستهلاكي كمتغـــير تابع ومستوى الدخل كمتغير مستقل، أي إذا زاد مستوى الدخل يترتب عليه زيـــادة فـــي الاســـتهلاك ولكن ليست كل الزيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك، بل

يذهب جزء منها إلى الادخار، وحسب النظرية الاقتصادية فقد تتراوح قيمة الميل الحدي للاستهلاك أو ميل دالة الاستهلاك بين الصفر والواحد الصحيح، أي ان:

$$0 < B_1 < 1$$

وتمثل المعادلة (11.8) متطابقة الدخل القومي والتي تمثل مجموع الاستهلاك والاستثمار والأنفاق الحكومي، وان خط (45°) يُمثل خط الدخل أي العرض الكلي. أما المتغير العشوائي ($U_i$) يمثل بقية العوامل التي تؤثر على الاستهلاك وغير داخلة في النموذج، كالتنبؤ بالأسعار المستقبلية وأسعار الفائدة وتوزيع واعادة توزيع الدخل،...الخ. ومن ثم فان التغير في أي من هذه العوامل سوف يترتب عليها تغير في المتغير العشوائي ($U_i$) ومن ثم يترتب عليه انتقال دالة الاستهلاك بالكامل وبذلك يتغير مستوى الدخل ($Y_i$) وبذلك يكون هناك ارتباط بين المتغير المستقل ($Y_i$) والمتغير العشوائي ($U_i$). ولهذا السبب لا يمكن استخدام طريقة (OLS) في حل هذا النموذج وتقدير معاملاته ($B_0$ و $B_1$)، ولكن يمكن تحديد مستوى الدخل التوازني باستخدام حل نموذج المعادلات الآنية للمعادلتين (10.8) و(11.8).

### 3.3.8 نمــوذج الأجــر الــنقدي-الســعر، Wage-Price Model (نموذج فيلبس):

بافــتراض ان لدينا نموذج فيلبس الذي يربط الأجر النقدي والأسعار باستخدام المعادلات الآتية:

$$W_i = B_0 + B_1 Un_i + B_2 \overline{P}_1 + U_1 \quad ...(12.8)$$

$$P_i = \alpha_0 + \alpha_1 \overline{W}_i + \alpha_2 \overline{R}_i + \alpha_3 \overline{M}_i + U_2 \quad ...(13.8)$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, s)$$

حيث ان:

$\overline{W}$ = معدل التغير في الأجور النقدية

$\overline{P}$ = معــــدل التغيــــر في الأسعار

(متغيرات داخلية في النموذج)

$Un$ = معدل البطالة

$\overline{R}$ = معدل التغير في مكننة رأس المال.

$\overline{M}$ = معدل التغير في سعر المواد الأولية المستوردة.

$i$ = عنصر الزمن (1, 2, ...,n).

$U_2, U_1$ = المتغيرات العشوائية أو حدود الخطأ.

$B_{is}, \alpha_{is}$ = معاملات النموذج.

مــن المعادلة (12.8) يتبين ان (W) متغير تابع وان (P) متغير مستقل، وعلى العكس مــن ذلــك فــأن (P) متغير تابع و(W) متغير مستقل في المعادلة (13.8). لذلك فان

المتغـــيرات المســـتقلة الداخلة في النموذج لها علاقة بالمتغير العشوائي ($U_1$) و($U_2$). ومن ثم يصعب استخدام طريقة (OLS) لتقدير معاملات النموذج.

ممـــا ســـبق يلاحـــظ ان النماذج التطبيقية المدروسة أعلاه، لا يمكن استخدام طـــريقة (OLS) لـــتقدير معاملاتهـــا وذلـــك لوجـــود علاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغيرات العشوائية فيها. ولكن هناك عدة طرق قد طورت في استخدام وحل نماذج المعـــادلات الآنية لتقدير معاملات تلك النماذج، وقد تم الإشارة إلى تلك الطرق أعلاه والتي سنبحثها لاحقاً في هذا الفصل.

## 4.8 الشكل المختزل، **Reduced Form**:

يطلـــق الشـــكل المخـــتزل على المعادلات التي تشتق من حل الشكل الهيكلي للنموذج، ويلاحظ ان معادلات الشكل المختزل تجعل كل متغير داخلي على حدة دالة في جميع المتغيرات المحددة سابقاً، Predetermined، للنموذج.

ان هـــيكل النموذج يمثل مجموعة من المعادلات كل واحدة تصف نوع واحد مـــن السلوك الاقتصادي المشابه للتعريف. وبافتراض أننا لدينا المعادلات الآتية والتي تمثل هيكل النموذج.

$$Q_d = B_0 + B_1 W_i + U_i \quad ....(14.8)$$

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 W_i + \alpha_2 O_i + \alpha_3 N_i + V_i \quad ...(15.8)$$

فأن الشكل المختزل للنموذج يمكن الحصول عليه وكما يلي:

ومن خلال شرط التوازن للمعادلتين (14.8) و (15.8) واعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$W_1 = \frac{\alpha_0 - B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1} O_i + \frac{\alpha_3}{B_1 - \alpha_1} N_i + \frac{V_i - U_i}{B_1 - \alpha_1} \quad \ldots(16.8)$$

وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة (15.8)، نحصل على:

$$Q = \frac{\alpha_0 B_1 - \alpha_1 B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2 B_1}{B_1 - \alpha_1} O_i + \frac{\alpha_3 B_1}{B_1 - \alpha_1} N_i + \frac{B_1 V_i - \alpha_1 U_i}{B_1 - \alpha_1} \ldots(17.8)$$

بعد إعادة الترتيب والتبسيط الرياضي لهاتين المعادلتين، يمكن إعادة كتابتهما بالصيغة الآتية:

$$W_i = \pi_1 + \pi_2 O_i + \pi_3 N_i + e_{1i} \quad \ldots(18.8)$$

$$H = \pi_4 + \pi_5 O_i + \pi_6 N_i + e_{2i} \quad \ldots(19.8)$$

حيث ان: $e, \pi$ يمثلان الحدود المحصورة في الأقواس للمعادلتين (16.8) و(17.8) بالتماثل، وان المعاملات $\pi$ تكون توليفاتها كما يلي:

$$\pi_1 = \frac{\alpha_0 - B_0}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad \pi_2 = \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}$$

$$\pi_3 = \frac{\alpha_3}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad \pi_4 = \frac{\alpha_0 B_1 - \alpha_1 B_0}{B_1 - \alpha_1}$$

$$\pi_5 = \frac{\alpha_2 B_1}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad \pi_6 = \frac{\alpha_3 B_1}{B_1 - \alpha_1} \qquad ...(20.8)$$

وهنا يجب ملاحظة أننا نحصل على قيمتين للمعامل $B_1$، أي ان:

$$B_1 = \frac{\pi_5}{\pi_2} \quad Or \quad B_1 = \frac{\pi_6}{\pi_3} \qquad ...(21.8)$$

وهــذه ليســت بالضـــرورة ان تكون متساوية، ولكل واحدة منها نحصل على تقدير للمعامل $B_0$ من خلال:

$$B_0 = \pi_1 - B_1 \pi_4 \qquad ...(22.8)$$

ومن ناحية أخرى لا نستطيع الحصول على تقدير لمعلمات دالة العرض (15.8) عبر $\alpha_0$ و $\alpha_1$ و $\alpha_2$ و $\alpha_3$، وهنا يمكن القول ان دالة الطلب (14.8) يكون لها تشخيص علــوي ودالة العرض لها تشخيص سفلي. وعندما نحصل على تقدير واحد لمعلمات المعادلـــة، يمكــن القــول بان المعادلة مشخصة تماماً. وعند الحصول على تقديرات متعددة، يقال ان المعادلة لها تشخيص علوي، وعندما لا نحصل على تقديرات يقال ان المعادلة لها تشخيص سفلي.

في جميع الحالات نتحدث عن الحصول على تقديرات للمعادلات الهيكلية من خلال تقدير المعلمات لمعادلات الشكل المختزل.

وعــند مناقشـــة التشـــخيص أعلاه للحصول على حلول المعلمات للمعادلات الهيكلـــية مـــن معـــاملات المعـــادلات للشكل المختزل. وفي تحليل النماذج القياسية

للمعــادلات الآنــية، فان الحلول في المعادلات (16.8) و(17.8) أو الصيغ المبسطة (18.8) و(19.8) تســمى بالشــكل المخــتزل لهيكل النموذج الأصلي في المعادلتين (14.8) و(15.8) وان كل معادلة من معادلات الشكل المختزل تحدد بدقة كيف يكون لقيمة المتغير الداخلي الواحدة لها علاقة بقيم المتغيرات الخارجية، والمتغير العشوائي وهــيكل المعلمات. وان الاعتماد المتداخل بين المتغيرات الداخلية يمكن حلها كما في المعادلتيــن (16.8) و(17.8)، ويجــب هنا ملاحظة ان كل المتغيرات الداخلية تعتمد علــى كــلاً مــن المتغيرات العشوائية، وان الصيغ الأخرى للهيكل والشكل المختزل لنموذج المعادلات الآنية، ساري المفعول لتركيب العملية الاقتصادية نفسها.

وربما لا يكون بالإمكان تقدير المعاملات الهيكلية من تقديرات الشكل المختزل، وأحياناً يمكن الحصول على تقديرات متعددة، ويصبح لدينا مشكلة الاختيار بينهم. لذلك سنعرض النماذج التالية:

**الــنموذج الأول:** بافــتراض ان لديــنـــا نموذج الطلب والعرض (للتبسيط نحذف المتغيرات العشوائية) كما يأتي:

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 Y \qquad \ldots(23.8)$$

$$Q_s = B_0 + B_1 P \qquad \ldots(24.8)$$

في هذا النموذج يُمكن تقدير قيمة واحدة فقط للمعلمة B كما سنرى لاحقاً.

وبحل المعادلتين اعلاه، نحصل على معادلات الشكل المختزل وكما يأتي:

$$P = \frac{B_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - B_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - B_1} Y \qquad \ldots(25.8)$$

$$Q = \frac{\alpha_1 B_0 - \alpha_0 B_1}{\alpha_1 - B_1} + \frac{\alpha_2 B_1}{\alpha_1 - B_1} Y \qquad \ldots(26.8)$$

ويمكن كتابة الشكل المختزل لهاتين المعادلتين (25.8) و(26.8) في الصيغة الآتية:

$$P = \pi_1 - \pi_2 Y \qquad \ldots(27.8)$$

$$Q = \pi_3 + \pi_4 Y \qquad \ldots(28.8)$$

حيث ان:

$$\pi_1 = \frac{B_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - B_1} \;,\; \pi_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - B_1}$$

$$\pi_3 = \frac{\alpha_1 B_0 - \alpha_0 B_1}{\alpha_1 - B_1} \;,\; \pi_4 = \frac{\alpha_2 B_1}{\alpha_1 - B_1} \qquad \ldots(29.8)$$

ويمكن تقدير معلمات معادلة العرض (24.11) من معلمات الانحدار المقدّر لمعادلات الشكل المختزل كما يأتي:

$$\hat{B}_1 = \frac{\hat{\pi}_4}{\hat{\pi}_2}$$

$$\hat{B}_0 = \hat{\pi}_1 - B_1 \hat{\pi}_4 \qquad \ldots(30.8)$$

ولكن يصعب الحصول على معلمات معادلة الطلب (23.11) أي ($\alpha_0$ و $\alpha_1$ و $\alpha_2$) مـــن معلمـــات الشـــكل المختزل. وهكذا فان معادلة العرض قابلة للتقدير، أما معادلة الطلب فإنها غير قابلة للتقدير.

من جانب آخر، نفترض ان نموذج العرض والطلب يأخذ الشكل الآتي:

دالة الطلب (31.8)... $Q_d = B_0 + B_1 P$

دالة العرض (32.8)... $Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 R$

يلاحـــظ من النموذج السابق، ان معادلة الطلب قابلة للتقدير، أما معادلة العرض فإنها غير قابلة للتقدير.

**النمـــوذج الثانـــي**: بافتراض ان لدينا النموذج الآتي:

(33.8)... $Q = B_0 + B_1 P + B_2 Y + B_3 R$

(34.8)... $Q = \alpha_0 + \alpha_1 P$

ويلاحـــظ مـــن النموذج السابق، يمكن تقدير قيمتين للمعلمة ($\alpha_1$)، حيث ان R يمثل المطر الذي يؤثر على الطلب وليس على العرض، (إذا كان هناك مطر كثير مثلاً فقد لا يذهب الناس إلى التسوق). وان معادلات الشكل المختزن تصبح:

$$Q = \frac{B_1 \alpha_0 - B_0 \alpha_1}{B_1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} Y - \frac{\alpha_1 B_3}{B_1 - \alpha_1} R \qquad ...(35.8)$$

$$P = \frac{\alpha_0 - B_0}{B_1 - \alpha_1} - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1} Y - \frac{B_3}{B_1 - \alpha_1} R \qquad ...(36.8)$$

وبالتعبير عن معادلات الشكل المختزل السابق في الشكل الآتي:

$$Q = \pi_1 - \pi_2 Y - \pi_3 R \qquad ...(37.8)$$

$$P = \pi_4 - \pi_5 Y - \pi_6 R \qquad ...(38.8)$$

ويلاحظ ان المعلمة $(\alpha_1)$ يكون لها قيمتين مقدرتين هما:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_5} \qquad ...(39.8)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\pi}_3}{\hat{\pi}_6} \qquad ...(40.8)$$

وليست بالضرورة ان تكون المعادلتين (39.8) و(40.8) متساويتان. ونحصل من كل معادلة منها على تقدير $(\alpha_0)$ وكما يأتي:

$$\alpha_0 = \pi_4 - \alpha_1 \pi_2 \qquad ...(41.8)$$

ومــن ثم فان المعادلة (34.8) يكون لها تشخيص علوي، أما المعادلة (33.8) تكون غير مشخصة بسبب عدم القدرة على الحصول على معلمات الانحدار المقدرة الخاصة بها ($B_0$ و $B_1$ و $B_2$ و $B_3$) من معلمات الانحدار لمعادلات الشكل المختزل.

**النمــوذج الثالث:** بافتراض ان نموذج المعادلات الآنية الآتية:

$$Q_s = B_0 + B_1 P + B_2 S \quad \ldots(42.8)$$

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 I \quad \ldots(43.8)$$

$$Q_s = Q_d \quad \ldots(44.8)$$

**المطلــوب:** إيجاد تشخيص المعادلات الآنية من خلال الشكل المختزل لهيكل النموذج.

**الحـــل:**

لإيجاد تشخيص المعادلة من خلال الشكل المختزل نتبع ما يأتي:

- جد الشكل المختزل بالنسبة لـــ P:

$$Q_s = Q_s = \overline{Q}$$

$$B_0 + B_1 P + B_2 S = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 I$$

$$B_1P - \alpha_1P = \alpha_0 - B_0 + \alpha_2I - B_2S$$

$$(B_1 - \alpha_1)P = \alpha_0 - B_0 + \alpha_2I - B_2S$$

وبالقسمة على $(B_1 - \alpha_1)$، نحصل على:

$$P = \frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}I - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1}S \qquad ...(45.8)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل المختزل كما يأتي:

$$P = A_1 + A_2I - A_3S \qquad ...(46.8)$$

- نشـــتق الشـــكل المختزل بالنسبة للمتغير (Q)، وبالتعويض عن قيمة (P) في المعادلة (42.8) او (43.8) نحصل على معادلة الشكل المختزل للمتغير (Q)، وكما يأتي:

$$Q = B_0 + B_1\left[\frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}I - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1}S\right] + B_2\,S$$

وبفك القوس، نحصل على:

$$Q = B_0 + \frac{B_1\alpha_1 - B_1B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}I - \frac{B_1B_2}{B_1 - \alpha_1}S + B_2\,S$$

وبإيجاد المضاعف المشترك نحصل على:

$$Q = \frac{B_0 B_1 - B_0 \alpha_1 + B_1 \alpha_1 - B_1 B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1 \alpha_2}{B_1 - \alpha_1} I - \left[ \frac{B_1 \mathbf{B}_2 + B_1 B_2 - \alpha_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} \right] S$$

وبعد الاختصار والتبسيط، نحصل على:

$$Q = \frac{B_1 \alpha_1 - B_0 \alpha_1}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1 \alpha_2}{B_0 - B_2} I - \frac{\alpha_1 B_2}{B_0 - B_2} S$$

**...(47.8)**

ويمكن كتابة الشكل المختزل كما يأتي:

$$Q = A_4 + A_5 I - A_6 S \quad ...(48.8)$$

أذن المعادلات (46.8 ، 48.8) تمثل الشكل المختزل كما يأتي:

$$P = A_1 + A_2 S - A_3 I \quad ...(49.8)$$

$$Q = A_4 + A_5 I - A_6 S \quad ...(50.8)$$

حيث ان:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad A_2 = \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}$$

$$A_3 = \frac{-B_2}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad A_4 = \frac{B_1 \alpha_1 - B_0 \alpha_1}{B_1 - \alpha_1}$$

$$A_5 = \frac{B_1 \alpha_2}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad A_6 = \frac{\alpha_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} \qquad \dots(51.8)$$

ولتشخيص المعادلات، يمكن الحصول على قيمة مقدرة واحدة لكل معلمة من معلمات الانحدار للنموذج في المعادلتين (42.8) و(43.8)، من خلال معلمات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل:

$$B_1 = \frac{A_5}{A_2} \quad , \quad \alpha_1 = \frac{A_5}{A_3}$$

$$B_2 = -A_3(B_1 - \alpha_1) \quad , \quad \alpha_2 = A_4 - B_1 A_1$$

$$\alpha_0 = A_4 - \alpha_1 A \qquad \dots(52.8)$$

ومن ثم يمكن القول ان المعادلات السلوكية لنموذج المعادلات الآنية تكون مشخصة.

## 5.8 تقدير نموذج المعادلات الآنية،

**:Estimation of Simultaneous Equations Model**

يمكـــن الوصـــول إلى التقدير الملائم باستخدام OLS أو أي طريقة أخرى من الطرق المستخدمة في تقدير نماذج المعادلات الآنية وهي:

### 1.5.8 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة:

**Indirect Ordinary Least Square (IOLS)**

تســمى هــذه الطــريقة بطريقة الشكل المختزل، وتستخدم في تقدير المعادلات المشخصـــة تماماً في نموذج المعادلات الآنية، ومن ثم تستخدم طريقة OLS في تقدير معلمــات انحــدار الشــكل المختزل (أو المحور) ومنها يمكن الحصول على معلمات المعادلات المشخصة المراد تقديرها.

رأيــنا فيما تقدم ان طريقة OLS تقود إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة إذا ما تــم تطبــيقها لغــرض الحصول على تقديرات لمعالم الصورة الهيكلية، مما يستدعي اللجوء إلى طرق أخرى للحصول على تقديرات غير متحيزة ومتسقة منها IOLS.

تســتخدم هــذه الطريقة لتقدير المعالم الهيكلية للمعادلات المشخصة تماما في نموذج المعادلات الآنية عبر استخدام الصورة المختزلة. وتتضمن الطريقة الخطوات الآتية:

1- إيجــاد النموذج المختزل، وكما تم عرضه في المباحث السابقة، أي التعبير عن المتغيرات الداخلية للمنظومة بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا.

2- تطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معلمات النموذج المختزل.

3- يـتم الحصـول علـى مقدرات المعلمات الهيكلية من مقدرات معاملات الشكل المخـتزل الـذي تـم الحصول عليه في الخطوة (2) وذلك باستخدام العلاقات الرياضية التي تجمع بين معالم الشكل الهيكلي ومعالم الشكل المختزل.

ان تقديـرات $B_S$ فـي بعض الأحيان، بطريقة (IOLS) لا تحقق نفس التقدير لـ B، وبشـكل ملفـت للـنظر، وفي هذه الحالة يكون هناك اكثر من مقدر واحد لمعاملات خاصة في هيكل المعادلة بطريقة (IOLS)، وهذه تميز المعادلة التي يكون لها تشخيص علوي، Over Identified.

وعندما تكون المعادلة مشخصة معنى ذلك وجود وحدة مقدرة بطريقة (IOLS) لكل واحدة من معلماتها. وعندما تكون المعادلة غير مشخصة يصبح من المستحيل ان نبنـي المقدرات بطريقة (IOLS) لكل المعلمات. فعلى سبيل المثال، لا يوجد معدل أو توليـفة لـ $(\pi_S)$ فـي المعادلة (31.8) و(32.8) الذي نحصل منها على $(\alpha_1)$، ومعادلة العرض (33.8) تكون غير مشخصة.

باختصـار، يمكـن القـول بأن المعادلة إما ان تكون مشخصة وتعتمد على المقـدرات بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (IOLS) التي يمكن تشكيلها، او أن تكون المعادلة غير مشخصة ولا تعتمد على المقدرات بطريقة (IOLS). لذلك فان طريقة (ILS) متحيزة، Bias ولكنها متوافقة، Consistent.

وعندما تكون المعادلة مشخصة فان طريقة (IOLS) تقودنا بالضبط إلى التقدير نفسـه كمـا هو الحال في طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (TS LS) التي تعطـي وضـع مفـرد للمعادلات، لذلك تكون طريقة (TS LS) مفضلة في الدراسات القياسية التطبيقية، خاصة عندما تكون المعادلة لها تشخيص علوي.

**مثال 1.8:** افتراض لدينا البيانات الآتية عن نموذج العرض والطلب:

**جدول (1.8): قيم متغيرات النموذج**

| i | P | Q | S | I |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 50 | 100 | 15 |
| 2 | 12 | 54 | 102 | 12 |
| 3 | 9 | 65 | 105 | 11 |
| 4 | 15 | 84 | 107 | 17 |
| 5 | 14 | 75 | 110 | 19 |
| 6 | 15 | 85 | 111 | 30 |
| 7 | 16 | 91 | 111 | 28 |
| 8 | 14 | 60 | 113 | 25 |
| 9 | 17 | 40 | 117 | 23 |
| 10 | 19 | 70 | 120 | 35 |

**المطلوب:** قدر نموذج المعادلات الآنية باستخدام طريقة IOLS.

**الحل:** نطبق طريقة OLS على الجدول اعلاه، باستخدام المعادلتين (49.8) و(50.8) لنحصل على ما يلي:

$$\hat{P} = -19.60 + 0.28S + 0.14I$$

$$S_e \quad 13.46 \quad 0.14 \quad 0.11$$

$$\text{t-value} \quad (1.4) \quad (1.9) \quad (1.2) \qquad \ldots(53.8)$$

$$\hat{Q} = 215.03 + 1.715S + 1.87I$$

$$S_e \quad 146.85 \quad 1.52 \quad 1.19$$

$$\text{t-value} \quad (1.5) \quad (1.1) \quad (1.6) \qquad \ldots(54.8)$$

باستخدام قيم المعلمات المقدرة أعلاه في معادلة الشكل المختزل (51.8) نحصل على:

$$\hat{B}_1 = \frac{A_6}{A_3} = \frac{1.87}{0.14} = 13.36$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{A_5}{A_2} = \frac{-1.71}{0.28} = -6.11$$

$$\hat{B}_2 = -A_2(\hat{B}_1 - \hat{\alpha}_1)$$

$$= -0.28[(13.36) - (-6.11)] = -5.45$$

$$\hat{\alpha}_2 = A_3(\hat{B}_1 - \hat{\alpha}_1)$$

$$= 0.14[(13.36) - (-6.11)] = 2.73$$

$$B_0 = A_4 - \hat{B}_1 A_1$$

$$= 215.03 - [(13.36) - (19.65)] = 477.55$$

$$\hat{\alpha}_0 = A_4 - \hat{\alpha}_1 A_1$$

$$= 215.03 - [(-6.11)(-19.65)] = 94.97$$

وباختصار هناك مشكلتين رئيسيتين عند استخدام طريقة (IOLS) هي:

أ- يمكــن تطبيقها على المعادلة المشخصة تماماً، ولا يمكن تطبيقها في المعادلة التي لها تشخيص علوي.

ب- يصــعب اشــتقاق معــادلات الشكل المختزل، حيث انها تتطلب استخدام هيكل المعادلات الجبرية، ولكن لحل هاتين المشكلتين نستخدم طريقة (TS LS) بدلاً من (IOLS) في نظام المعادلات الآنية.

### 2.5.8 طريقة المتغير الأداتي، Instrumental Variable (IV):

تهــدف هــذه الطــريقة إلــى تحقيق درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة والمتغــير العشــوائي وذلــك من خلال استخدام متغيرات خارجية ملائمة كمتغيرات أداتية.

وتســتخدم هذه الطريقة في تقدير المعادلات السلوكية التي يكون لها تشخيص علوي وعندما يكون المتغير الخارجي له ارتباط بالمتغير العشوائي ولا يمكن الحصول على تقديرات متوافقة للمعلمات باستخدام طريقة المتغيرات الأداتية. وعليه فان إيجاد المتغــيرات الأداتــية فــي نمــوذج المعادلات الآنية ليست مشكلة أساسية وذلك لأن المتغيرات الخارجية غير موجودة في المعادلة لاستخدامها كمتغيرات مستقلة.

**مثال 2.8:** بافتراض ان النموذج المراد تقديره هو:

$$Q_s = B_0 + B_1 P + B_2 S + U_1 \qquad ...(55.8)$$

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 I + U_2 \qquad ...(56.8)$$

$$Q_s = Q_d \qquad ...(57.8)$$

يلاحـــظ من المعادلة (55.8) وجود متغير خارجي واحد هو (S) وله ارتباط بالمتغير العشوائي $U_1$، لذلك نحتاج إلى متغير أداتي واحد. وباســتخدام الشكل المختزل للنموذج بالنسبة إلى P، نحصل على:

$$P = A_1 - A_2 S + A_3 I + U_i \qquad ...(58.8)$$

وللحصـــول علـــى تقدير معلمات الانحدار من المعادلة (58.8) تستخدم لبناء المتغير الأداتي (P) كما يأتي:

$$P = A_1 - A_2 S + A_3 I \qquad ...(59.8)$$

وبمـــا انه يوجد متغير خارجي واحد فقط يظهر في الجهة اليمنى من المعادلة (58.8) لذلـــك فان (P) ليس له علاقة ارتباط بحدود المتغيرات العشوائية ($U_1$) و($U_2$) ويمكن ملاحظـــة ذلـــك فيما إذا كان معامل التحديد المتعدد ($R^2$) في المعادلة (59.8) مساوياً

للواحد الصحيح، أي ان ($R^2=1$) فان $(P = \hat{P})$، ومن ثم لا يكون هناك اختلاف بين مقدرات النموذج بطريقة (OLS) وبين طريقة (TSLS).

لذلــك فان تعويض المتغيرات المساعدة للمتغيرات الداخلية في الجهة اليمنى مــن النموذج، في كل معادلة يتم تقديرها بطريقة (OLS) يمكن وصفها بالكيفية التي وردت فــي المعادلتين 55.8 و 56.8. وبما أننا قد حصلنا على تقدير $A_1$ ، $A_2$، $A_3$ من الشكل المختزل في المثال 1.8، الذي يساوي:

$$\hat{P} = -19.60 + 0.28S + 0.14I \qquad \ldots(60.8)$$

وبالتعويض عن قيم S، I في الجدول (1.8) أعلاه نحصل على P كما يأتي:

$$\hat{P}_1 = -19.60 + 0.28(100) + 0.14(15)$$
$$\hat{P}_1 = -10.50$$
$$\hat{P}_2 = -19.60 + 0.28(102) + 0.14(12)$$
$$\hat{P}_2 = 10.65$$

وهكذا بالطريقة نفسها والى نهاية الجدول نحصل على القيم المقدرة للمتغيرات الأداتية $(\hat{P}_i)$، كما في الجدول الآتي:

**جدول (2.8): القيم المقدرة للمتغير $(\hat{P})$.**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.50 | 10.65 | 11.35 | 12.75 | 13.87 | 15.67 | 15.39 | 15.54 | 16.39 | 18.89 |

ويمكـــن تقدير نموذج المعادلات الآنية بطريقة المتغيرات الأداتية بأسلوب آخر والذي يمكن تلخيصه بالخطوات الآتية:

**أولاً:** اختـــيار المتغيرات الأداتية التي يتم إحلالها محل المتغيرات الداخلية التي تظهر كمتغــيرات مستقلة في المعادلة المراد تقديرها، وان يكون للمتغير الأداتي عدة خصائص منها:

- ألا يرتـــبط المتغير الأداتي بالمتغير العشوائي، حد الخطأ في المعادلة المراد تقديرها.
- ان يكـــون له علاقة ارتباط قوية بالمتغير (أو المتغيرات) الداخلية التي تظهر في المعادلة المراد تقديرها.
- ان يكون له على الأقل علاقة ارتباط بالمتغير (أو المتغيرات) الخارجية التي تظهر في المعادلة المراد تقديرها كمتغيرات مستقلة.
- عند استخدام اكثر من متغير أداتي في المعادلة المراد تقديرها يجب ان يرتبط كل منهم بالمتغير الآخر.

**ثانـــياً:** ضرب المتغير الأداتي (كل متغير مساعد على حدة) في المعادلة المراد تقديـــرها ومن ثم جمع حاصل الضرب لكل المشاهدات، ويترتب على ذلك وجـــود عـــدة معادلات، وعند حل هذه المعادلات يمكننا الحصول على قيم المعلمات المقدرة لهذا النموذج.

**مـــثال 3.8:** بافـــتراض أننا نريد تقدير العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي (C) ومستوى الدخل، Y، في نموذج المعادلات الآنية التي يمكن كتابتها بالكيفية الآتية:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i \quad , \qquad (i = 1,2,...,n) \qquad ...(61.8)$$

حيث ان:

Y = له علاقة ارتباط بالمتغير العشوائي، $U_i$، وذلك لان Y متغير داخلي في النموذج المراد تقديره.

وعند تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) على المعادلة (61.8) نحصل علـــى تقديرات متحيزة لمعلمات المعادلة في النموذج السابق، ولكي نحصل على قيم مقدرة غير متحيزة لمعلمات المعادلة يتم ذلك باستخدام طريقة (IV) كما يأتي:

أ- اختـــيار المتغير الأداتي الذي لا يكون له ارتباط بالمتغير العشوائي ($U_i$) ولكن له علاقة ارتباط قوي بالمتغير الداخلي في المعادلة، وليكن $W_i$ ثم إعادة كتابة المعادلة المراد تقدير معاملاتها مع إهمال الحد المطلق لها، وتأخذ الشكل الآتي:

$$C_i = B_1 Y_i + U_i \qquad ...(62.8)$$

$$c_i = (C_i - \overline{C})$$

$$y_i = (Y_i - \overline{Y})$$

$$\overline{C} = \frac{\sum C_i}{n}$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} \qquad ...(63.8)$$

ب- ضـــرب المتغـــير الأداتي $W_i$ في المعادلة (61.8) ثم جمع حاصل ضرب لكل المشاهدات نحصل على:

$$\sum(w_i c_i) = B_1 \sum(w_i y_i) + \sum(w_i u_i) \quad ...(64.8)$$

حيث ان: $w_i = W_i - \overline{W}$

وبافــتراض ان هــناك علاقة ارتباط بين $W_i$ و $U_i$ فان القيمة المتوقعة تكون مساوية للصفر، أي:

$$E(\sum w_i c_i) = 0$$

ومن ثم تصبح المعادلة (64.8) كما يأتي:

$$\sum(w_i c_i) = B_1 \sum(w_i y_i) \quad ...(65.8)$$

وبقسمة الطرفين على $\sum(w_i y_i)$ ، نحصل على:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum(w_i c_i)}{\sum(w_i y_i)} \quad ...(66.8)$$

**مـــثال 4.8:** إذا توفرت البيانات الآتية عن الأنفاق الاستهلاكي، $C_i$، والدخل، $Y_i$، في الجدول الآتي:

**جـــدول (3.8): لبيانات قيم $C_i$ ، $Y_i$ ، $W_i$**

| I | $C_i$ | $Y_i$ | $W_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 5 | 10 |
| 3 | 6 | 6 | 11 |
| 4 | 11 | 6 | 14 |
| | $\sum C_i = 24$ | $\sum Y_i = 20$ | $\sum W_i = 40$ |

**المطلوب:** باستخدام البيانات الواردة في الجدول أعلاه، تقدير المعادلة الآتية:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i$$

حيث أن: $(W_i)$ متغير أداتي.

**الحـــل:** لإيجـــاد قيمـــة المعلمة $B_1$ نجد انحرافات قيم المتغيرات عن أوساطها الحسابية كما يأتي:

$$\overline{C} = \frac{\sum C_i}{n} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\overline{W} = \frac{\sum W_i}{n} = \frac{40}{4} = 10$$

وبتطبيق الصيغة الآتية:

$$B_1 = \frac{\sum(w_i c_i)}{\sum(w_i y_i)}$$

نجــد قــيم كل من انحراف المتغيرات $w_i$، $c_i$ ، $y_i$ عن أوساطها الحسابية ثم نضرب $w_i c_i$ وكذلك $w_i y_i$، كما في الجدول الآتي:

**جدول (4.8): البيانات المستخدمة في تقدير $B_1$**

| i | $C_i$ | $Y_i$ | $W_i$ | $c_i$ | $y_i$ | $w_i$ | $w_i c_i$ | $w_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 5 | −3 | −2 | −5 | 15 | 10 |
| 2 | 4 | 5 | 10 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 6 | 6 | 11 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 11 | 6 | 14 | 5 | 1 | 4 | 20 | 4 |
| $\sum$ | 24 | 20 | 40 | 0 | 0 | 0 | 35 | 15 |

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{\sum(w_i c_i)}{\sum(w_i y_i)} = \frac{35}{15} = 2.33$$

### 3.5.8 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين، :Two Stage Least Squares (TSLS)

تعــد هــذه الطــريقة من الطرق الشائعة الاستخدام في الدراسات القياسية التطبيقية للحصول على مقدرات متوافقة للمعلمات في نموذج المعادلات الآنية الذي تم افترضــه لمعالجة التأثير المتبادل في قيمة المتغير التابع الاستهلاك ($C_i$) على الدخل

($Y_i$) والتأثير في قيمة المتغير المستقل ($Y_i$) على ($C_i$)، بحيث أصبح الفرض الذي يتعلق باستقلال معامل المتغير العشوائي عن المتغير المستقل غير صادق.

وان جوهر هذه الطريقة هو استبدال (أو إحلال) المتغيرات المستقلة التي تستخدم كتقريب للمتغير الأصلي، والذي لا يرتبط بشكل أساسي بالمتغير العشوائي ومن ثم فان طريقة OLS يمكن استخدامها في تقدير المعادلة. وربما تكون نتيجة تقدير المعاملات الأصلية للمعادلة متحيزة ولكنها تتلاشى كلما كبر حجم العينة.

تعتبر طريقة TSLS من ابسط وأوسع الطرق الخاصة لتقدير المعلمات الهيكلية للمعادلات المشخصة تماما وفوق التشخيص في نموذج المعادلات الآنية، وتقود الطريقة إلى مقدرات تتسم بالاتساق حيث تقود الى قياسات متطابقة مع ذلك التي يمكن التوصل إليها عبر طريقة IOLS .

تتفوق طريقة TSLS على طريقة IOLS من حيث إنها تعطي أيضا الأخطاء المعيارية للمعلمات الهيكلية المقدرة مباشرة والتي يتعذر الحصول عليها من خلال IOLS.

ويشترط عند التطبيق طريقة TSLS تحقق الافتراضات الاعتيادية في عنصر الخطأ أي ان:

$$U_t \sim N(0, \sigma^2 U) \qquad , E(U_t U_s) = 0 \qquad , \quad t \neq s$$

وبالتالي انعكاس تحقق هذه الافتراضات على عنصري الخطأ في النموذج المختزل أي ان:

$$V_t \sim N(0, \sigma^2 U) \qquad , E(V_t V_s) = 0 \qquad , \quad t \neq s$$

إضـــافة إلـــى أعـــلاه يشترط ان تكون عناصر الخطأ العشوائي في معادلات الشكل المخـــتزل مســـتقلة عن المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا. كما ويجب ان تكـــون عـــدد مشاهدات العينة اكبر من عدد المتغيرات الخارجية والمتغيرات المرتدة زمنيا ( ان تكون العينة كبيرة بدرجة كافية).

**وتتضمن الطريقة مرحلتين من مراحل التقدير:**

**المـــرحلة الأولـــى:** يـــتم إجـــراء انحدار لكل متغير داخلي على مجموعة المتغيرات الخارجية في نظام المعادلات الآنية للحصول على معادلات الشكل المختزل. ويقـــود هذا إلى قيمة مقدرة للمتغير الداخلي ترتبط بصورة اقل مع حد الخطأ العشوائي للمعادلة الهيكلية وذلك بالمقارنة مع ارتباط المتغير الأصلي مع حد الخطأ العشوائي.

**المـــرحلة الثانـــية:** تستخدم القيم المقدرة للمتغيرات الداخلية بدلا عن قيمها الأصلية لتقدير المعادلات الهيكلية للنموذج للحصول على قيم مقدرة للمتغيرات الداخلية مـــن خـــلال التعويض بالقيم الفعلية للمتغيرات الخارجية في معادلات الشكل المختزل. ويعني ذلك الأمر انه يجرى تنقية المتغيرات الداخلية الموجودة على يميـــن المعادلة الهيكلية من شوائب الارتباط مع العنصر العشوائي، مما يجعل مقـــدرات TSLS متسقة للمعلمات الهيكلية.

وإن كانت هذه الطريقة تعطينا تقديرات متحيزة ومتوافقة فان الاعتماد على عينة ذات حجم كبير نسبياً يؤدي إلى إيجاد تقديرات جيدة للمعلمات.

تتفق هذه الطريقة مع الطرق الأخرى (IOLS) و(IV) في محاولة التخلص من التحـــيز الـــوارد فـــي نمـــوذج المعلمـــات الآنية وذلك بسبب وجود متغيرات داخلية

كمتغيرات مستقلة في المعادلة المراد تقديرها. ويتم استخدام هذه الطريقة في تقدير المعادلات التي يكون لها تشخيص علوي وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات الآتية:

1- فصل المتغير المستقل، وعزله عن ذلك الجزء الذي يرتبط بمعامل المتغير العشوائي.

2- استخدام القيم الجديدة، والتي توصلنا إليها بعد عزل الجزء الذي يرتبط بالمتغير العشوائي، بطريقة (OLS) في إيجاد تقدير المعاملات.

**مثال 5.8:** لمعرفة الكيفية التي تطبق بها هذه الطريقة، نستخدم نموذج للعرض والطلب ولنفترض ان هيكل النموذج المراد تقديره يمكن وصفه بالكيفية الوارد ذكره في المثال 1.8.

حيث ان:

Q: تمثل الكمية المطلوبة والمعروضة

P: تمثل السعر

متغيرات داخلية في النموذج

I: تمثل الاستثمار

S = الادخار

متغيرات خارجية في النموذج

$U_1$ و $U_2$: تمثل المتغيرات العشوائية.

وبافتراض ان بيانات النموذج معطاة في الجدول (1.8).

**المطلوب:** تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (TSLS).

**الحل:**

**أولاً:** إجراء انحدار P على S ، I باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، نحصل على المعادلة التقديرية لـ $\hat{P}$، وكما في المعادلة 66.8.

وباستخدام المعادلة أعلاه وبيانات كل من S و I الواردة في الجدول (1.8) نحصل على قيم P، كما في الجدول 8.8.

**جدول (8.8): قيم $\hat{P}$ المقدرة**

| i | $\hat{P}$ |
|---|---|
| 1 | 10.50 |
| 2 | 10.65 |
| 3 | 11.35 |
| 4 | 12.75 |
| 5 | 13.87 |
| 6 | 15.67 |
| 7 | 15.39 |
| 8 | 15.54 |
| 9 | 16.39 |
| 10 | 18.89 |

**ثانياً:** يتم إحلال P محل الكمية Q ثم إجراء انحدار Q على P وذلك باستخدام طريقة (OLS)، نحصل على:

$$\hat{Q} = 49.41 + 1.27\hat{P}$$

وعند مقارنة المعلمات المقدرة بطريقة TSLS مع طريقة IOLS يتبين ان هناك علاقة قريـــبة، وان الاخـــتلاف بين مقدرات الطريقتين ناتج من دوران قيم $\hat{P}$ في الجدول (2.8).

لذلـــك عندما تكون المعادلة مشخصة تماماً فان TSLS وIOLS يكونان متساويان. وان قـــيم $\hat{B}_1$، $\hat{\alpha}_0$، لا نحتاج لاشتقاقتهما لان قيمهما كانت ممتازة بالنسبة لطريقة IOLS وثـــم ان IOLS لا يمكـــن تطبيقها على المعادلة التي يكون لها تشخيص علوي. ولكن طـــريقة TSLS تستخدم في الحصول على مقدرات المعاملات للمعادلة التي يكون لها تشخيص علوي.

## الأسئلة والتمـــاريـــــن

**السؤال 1.8:** باستخدام النموذج الآتي:

دالة الطلب $Q_d = \beta_0 + \beta_1 W_i + U_1$

دالة العرض $Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 W_i + \alpha_2 O_i + U_2$

**المطلوب:** إيجاد الشكل المختزل للنموذج.

**السؤال 2.8:** إذا كان نظام المعادلات الآنية لنموذج العرض والطلب كما يأتي:

معادلة الطلب $Q_d = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 I + U_1$

معادلة العرض $Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 S + U_2$

المطلوب:

أ- إيجاد الشكل المختزل للنموذج.

ب- بافتراض لدينا البيانات الواردة في الجدول الآتي:

| i | P | Q | S | I |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 100 | 200 | 30 |
| 2 | 24 | 108 | 204 | 24 |
| 3 | 18 | 130 | 110 | 22 |
| 4 | 30 | 170 | 114 | 34 |
| 5 | 28 | 150 | 220 | 38 |
| 6 | 30 | 170 | 222 | 60 |
| 7 | 32 | 180 | 222 | 56 |
| 8 | 28 | 120 | 226 | 50 |
| 9 | 34 | 80 | 234 | 46 |
| 10 | 38 | 140 | 240 | 70 |

قدر هيكل المعلمات للنموذج أعلاه باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (IOLS)، ثم بين الخطوات المطلوبة لذلك التقدير.

**السؤال 3.8:** إذا كان لديك معادلتين هيكليتين يمثلان دالة الطلب والعرض كما يأتي:

دالة الطلب $$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + U_1 \qquad (\alpha_1 < 0)$$

دالة العرض $$Q_s = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 Y + U_2 \qquad (\beta_1 > 0)$$

حيث ان:

Q: تمثل الكمية.

P: يمثل السعر.

Y: تمثل الدخل.

**المطلوب:**

1-هل يعد النموذج أعلاه من نماذج المعادلات الآنية، ولماذا؟

2- حدد المتغيرات الخارجية والداخلية في النموذج.

3- أوجد الشكل المختزل للنموذج.

4- هل يمكن تقدير معاملات النموذج بطريقة OLS ولماذا ؟

5- هل تعد معاملات النموذج متحيزة ومتوافقة ام ماذا.

**السـؤال 4.8:** كون نموذج المعادلات الآنية لنموذج العرض والطلب على النقود، ثم حدد المتغيرات الخارجية والداخلية للنموذج.

**السـؤال 5.8:** كـون نموذج كينزي لتحديد الدخل القومي، ثم بيّن المتغيرات الداخلية والخارجية للنموذج.

**السؤال 6.8:** عرّف مع الاستعانة بمثال بسيط:

1- المعادلة المنفردة ومنظومة المعادلات الآنية.

2- الصيغة الهيكلية والصيغة المختزلة.

3- معادلة مشخصة تماماً ومعادلة فوق التشخيص.

4- المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية.

5- متغير مرتد زمنياً ومتغير داخلي.

**السؤال 7.8:** إذا أعطيت المعادلات الآنية الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 Y_{t-1} + U_t$$
$$Y_t = C_t + I_t$$

حيث ان:

$C_t$، $Y_t$، $I_t$ : تمثل أنفاق المستهلك، الدخل والاستثمار على التوالي.

$C_t$ و $Y_t$ : تمثل متغيرات داخلية ، في حين $I_t$ متغير خارجي.

$Y_{t-1}$ : تمثل متغير داخلي مرتد زمنياً.

**المطلوب:** اشتق الصيغة المختزلة لكل من $Y_t$ و $C_t$ .

**السؤال 8.8:** ان بعض الأفراد يعتقدون ان المبيعات تعتمد على مصروفات الاعلان، وبعــض الأفراد الآخرين يعتقدون على العكس من ذلك بأن المصروفات على الإعلان تعتمد على المبيعات، ضع نموذج معادلات آنية لهذه العلاقات وحدد عدد المعادلات في النموذج، وما هي المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية لذلك النموذج ؟

**السؤال 9.8:** افترض انك أعطيت النموذج الآتي:

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + E_t$$
$$I_t = B_1 + B_2 Y_t + B_2 G_{t-1} + U_t$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

عـــندما يكـــون $Y_t$ الدخل، $I_t$ الاستثمار، $C_t$ الاستهلاك ، أوجد نظام الشكل المختزل للنموذج وحدد المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية، ثم بيّن هل ان دالة الاستهلاك مشخصة او فوق المشخصة، ولماذا ؟

# الفصل التاسع: مشـــــكلة التشـــــخيص

# Identification Problem

1.9 المقدمـــــــــــة

2.9 طبيعة مشكلة التشخيص

3.9 شـــروط التشـــــخيـص

4.9 الأسئلة والتماريــــن

# الفصل التاسع: مشــــــــــــــــــكلة التشـــخيص

# Identification Problem

## 1.9 المقدمـــــــــــــة:

عـــندما يكـــون المتغير التابع في معادلة ما متغيراً مستقلاً في معادلة أخرى، يكـــون لدينا نظام او نموذج معادلات آنية، اي ان لكل متغير داخلي في النظام هناك معادلـــة سلوكية أو هيكلية وان استخدام طريقة OLS لتقدير المعادلات الهيكلية يؤدي إلى تقديرات معلمات متحيزة وغير متسقة، وهو ما يُدعى بتحيز المعادلات الآنية وكما تمت الإشارة إلية في الفصل السابق. وللحصول على تقديرات للمعلمات متسقة يجب الحصـــول أولاً علـــى معـــادلات الشكل المختزل للنموذج والتي تعبر عن المتغيرات الداخلـــية في النظام كدالة فقط في المتغير الخارجي للنموذج. ولمعرفة طبيعة الشكل الهيكلي والشكل المختزل لنظام المعادلات الآنية نأخذ النموذج التالي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t \qquad \ldots(1.9)$$

$$Y_t = C_t + I_t \qquad \ldots(2.9)$$

يتضـــح مـــن المعادلتيـــن (1.9) و(2.9) ان $C_t$ و$Y_t$ متغيران داخليان وان $I_t$ متغير خارجـــي يتحدد من خارج النموذج، وحيث ان $C_t$ تعتمد على $Y_t$ في المعادلة (1.9) وتعتمد $Y_t$ على $C_t$ و$I_t$ في المعادلة (2.9) فإن $C_t$ و$Y_t$ تتحددان معاً، وهذا يعني ان لديـــنا نموذج معادلات آنية لان التغير في $U_t$ يؤثر على $C_t$ في المعادلة (1.9) وهذا بـــدوره يؤثـــر على $Y_t$ في المعادلة (2.9) وكنتيجة لذلك تكون $Y_t$ و$U_t$ مترابطتين مؤدية ذلك إلى تقديرات OLS متحيزة وغير متسقة لمعادلة $C_t$ و$Y_t$ هذا فيما يتعلـــق

بالشـــــكل الهيكلـــــــي، Structural model. أمـــا بالنسبة إلى الشكل المختزل، Reduced form، فيمكن الحصول عليه باتباع الآتي:

نعوض المعادلة (2.9) في المعادلة (1.9):ذذ

$$C_t = B_0 + B_1(C_t + I_t) + U_t \qquad \ldots(3.9)$$

$$C_t = B_0 + B_1 C_t + B_1 I_t + U_t$$

$$C_t - B_1 C_t = B_0 + B_1 I_t + U_t$$

$$C_t(1 - B_1) = B_0 + B_1 I_t + U_t$$

$$C_t = \frac{B_0}{1-B_1} + \frac{B_1}{1-B_1} I_t + \frac{1}{1-B_1} U_t \qquad \ldots(4.9)$$

معادلة الشكل المختزل الأولى:

$$C_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + V_{1t} \qquad \ldots(5.9)$$

ويمكـــن اشـــتقاق معادلة الشكل المختزل الثانية بتعويض المعادلة (1.9) في المعادلة (2.9) وكالآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t + I_t \qquad \ldots(6.9)$$

$$Y_t - B_1 Y_t = B_0 + I_t + U_t$$

$$Y_t(1 - B_1) = B_0 + I_t + U_t$$

$$Y_t = \frac{B_0}{1-B_1} + \frac{1}{1-B_1} I_t + \frac{1}{1-B_1} U_t \qquad \ldots(7.9)$$

معادلة الشكل المختزل الثانية:

$$Y_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + V_2 t \qquad ...(8.9)$$

الصـــيغتين (5.9) و(8.9) والمشتقة من النموذج الهيكلي تمثلان النموذج المختزل ، حيث يظهر بأن المتغيرات الداخلية $C_t$ و$Y_t$ دالة في المتغير الخارجي $I_t$ ، فضلاً عن الخطأ العشوائي $U_t$، ان معلمات الشكل المختزل هذه تعبر عن الآثار الكلية (المباشرة وغير المباشرة) للمتغير المستقل على المتغير التابع، أي ان زيادة المتغير المستقل $I_t$ بمقـــدار وحدة واحدة يؤدي إلى زيادة الاستهلاك $C_t$ بمقدار $(\frac{B_1}{1-B_1})$ وزيادة الدخل $Y_t$ بمقـــدار $(\frac{B_1}{1-B_1})$، فـــي حيـــن ان معلمات الشكل الهيكلي تقيس الأثر المباشر للمتغير المستقل على المتغير التابع.

## 2.9 طبيعة مشكلة التشخيص:

تشير مشكلة التشخيص إلى إمكانية حساب المعلمات الهيكلية لنموذج معادلات آنية من معلمات النموذج المختزل أو عدم إمكانية حسابها، وتعد من المشاكل الأساسية التـــي تواجـــه بـــناء النموذج القياسي، إذ تهتم بكيفية قياس كل معادلة من المعادلات الهيكلـــية للـــنموذج، علـــيه فإن المشكلة تتلخص في إمكانية التعرف على ما إذا كان النموذج مصاغاً بشكل يتيح الحصول على تقديرات وحيدة وفريدة للمعلمات من بيانات العينة أم لا.

وبصـــورة عامـــة يمكـــن القول إذا كان من الممكن الحصول على المقدرات العدديـــة لمعلمات المعادلة الهيكلية من معاملات الشكل المختزل المقدرة فتكون حينئذٍ تلـــك المعادلـــة مشخصة تماماً، Exactly identified، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فإن

المعادلـــة تكـــون غـــير مشخصــــة، Unidentified، أو تحـــت التشـــخيص، Under identified. وفي الحالة التي يكون فيها هناك إمكانية للحصول على عدة قيم عدديـــة لبعض معلمات المعادلات الهيكلية من معاملات الشكل المختزل عندها سوف لـــن يكون هناك حلاً وحيداً لهذه المعلمات وعندئذٍ تكون تلك المعادلة فوق التشخيص، Over identified. ويمكن توضيح مستويات التشخيص هذه كالآتي:

لنتأمل نموذج العرض والطلب الآتي:

$$Q_d = a_0 + a_1 P + U_1 \qquad \ldots(9.9)$$

$$Q_s = b_0 + b_1 P + b_2 W + U_2 \qquad \ldots(10.9)$$

$$Q_d = Q_s \qquad \ldots(11.9)$$

حيث ان:

$Q_d$: تمثل الكمية المطلوبة من سلعةٍ ما.

$Q_s$: تمثل الكمية المعروضة من سلعة ما.

$P$: تمثل سعر السلعة.

$W$: تمثل الحالة الجوية.

$U_2$، $U_1$: الخطأ العشوائي.

وان $Q_d$ ، $Qs$، $P$ متغيرات داخلية ، و$W$ متغير خارجي.

يتضـــح مـــن النموذج الهيكلي أعلاه، ان معادلة الطلب مشخصة تماماً ومن ثم يمكن تقديـــر معاملاتهـــا $a_0$، $a_1$ في حين تعد معادلة العرض غير مشخصة إذ ان المتغير الخارجـــي، $W$، قـــد استبعد من معادلة الطلب وان استبعاد المتغيرات الخارجية من المعادلة يمثل مفتاح التشخيص. وعليه فان تضمين المتغير الخارجي، $W$، في معادلة

العـــرض جعلهـــا غـــير مشخصة، ومن ثم فان منظومة العرض والطلب ككل غير مشخصة ويجب النظر بإعادة بنائها.

وبهـــدف جعـــل معادلة العرض مشخصة يمكن إضافة متغير جديد إلى دالة الطلب وهو الدخل (Y)، إذ تشير النظرية الاقتصادية إلى كون الدخل متغير مهم في تحديد الطلب على السلع والخدمات فيصبح نموذج الطلب والعرض الجديد كالآتي:

$$Q_d = a_0 + a_1 P + a_2 Y + U_1 \qquad \ldots(12.9)$$

$$Q_s = b_0 + b_1 P + b_2 W + U_2 \qquad \ldots(13.9)$$

$$Q_d = Q_s \qquad \ldots(14.9)$$

حيـــث يتضـــح مـــن الـــنموذج أعلاه بأن كل من معادلتي الطلب والعرض أصبحتا مشخصتين تماماً والمنظومة ككل مشخصة تماماً وذلك لأن كلا المتغيرين الخارجيين، W، الحالة الجوية وY، الدخل ساعدا على تشخيص الدالة التي حذفت منها.

## 3.9 شروط التشخيص، Identification Condition:

تشخيص أي معادلة هيكلية يتطلب أيجاد الاختزال لها أولاً، وفي الواقع هناك قاعدة عامة يمكن استخدامها لهذا الغرض من دون اللجوء إلى الاختزال وتتلخص هذه القاعدة بتحقق الشرطين الآتيين:

أ- شرط الدرجة، Order Condition.

ب- شرط الرتبة، Rank Condition.

أن الشـــرط الأول يعـــد ضـــروري ولكنه غير كافي لتشخيص أي معادلة هيكلية، لذا وتأكيداً للشرط الأول يستوجب اجتياز المعادلة شرط الاختبار الثاني.

**أ: شرط الدرجة، Order Condition:**

وفقاً لهذا الشرط تكون المعادلة مشخصة عندما يكون عدد المتغيرات الداخلية (التابعة) والمتغيرات المحددة مسبقاً (خارجية، مرتدة زمنياً) والداخلة في المعادلات الهيكلية للنموذج مساوياً او اكبر من عدد معادلات النموذج مطروحاً منها واحد، أي:

$$K - M \geq S - 1$$

حيث ان:

K: تمثل عدد المتغيرات الداخلية والمحددة مسبقاً.

M: تمثل عدد المتغيرات التي تحتويها المعادلة الهيكلية المراد تشخيصها.

S: تمثل عدد المعادلات الهيكلية التي يحتويها النموذج.

**أولاً:** فإذا كانت عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها مساوياً لعدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد كانت المعادلة مشخصة تماماً أي:

$$S - M = S - 1$$

ويمكن في هذه الحالة حساب قيمة وحيدة ومنفردة للمعلمات الهيكلية من معلمات الشكل المختزل.

**ثانياً:** وإذا كانت عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها اقل من عدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد تكون المعادلة دون مستوى التشخيص أي غير مشخصة:

$$K - M < S - 1$$

وفي هذه الحالة لا يمكن حساب أي من المعلمات الهيكلية للمعادلة من معلمات الشكل المختزل.

**ثالثاً:** أما إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها اكبر من عدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد تكون المعادلة فوق مستوى التشخيص، أي:

$$K - M > S - 1$$

وفي هذه الحالة يمكن حساب اكثر من قيمة عددية لبعض المعلمات الهيكلية للمعادلة من معلمات الشكل المختزل.

وباختصار فان شرط الدرجة للتشخيص يُمكن بيانه في الجدول 1.9:

**جدول 1.9: شرط الدرجة للتشخيص**

| عدد المعادلات مطروح منها واحد | العلامة | عدد المتغيرات المفقودة، M | نوع لتشخيص المعادلة |
|---|---|---|---|
| S – 1 | = | M | مشخصة تماماً |
| S – 1 | < | M | لها تشخيص سفلي |
| S – 1 | > | M | لها تشخيص علوي |

حيث يمكن لشرط الدرجة للتشخيص ان يأخذ الصيغة الآتية:

$$M \geq S - 1$$

**ب: شرط الرتبة، Rank Condition:**

بموجب هذا الشرط ترتب معلمات المعادلات الهيكلية بدلالة جميع المتغيرات في المنظومة ثم تؤخذ المعلمات المقابلة للمعلمات المفقودة في المعادلة المراد

تشخيصـــها وتوضع بشكل مصفوفة ثم تحسب قيمة محدد هذه المصفوفة والتي تكون ذات رتبة (S-1). فإذا كانت القيمة تلك لا تساوي صفر تكون المعادلة مشخصة، أما إذا كانـــت تلك القيمة مساوية إلى الصفر كانت المعادلة دون مستوى التشخيص. وإذا حدث وان كانت المصفوفة المستخرجة من المعالم الهيكلية غير مربعة عندها يتطلب تجزئتها إلى كافة المصفوفات الجزئية الممكنة وذات الرتبة (S-1)، فإذا كانت واحدة علـــى الأقـــل من قيم هذه المحددات لا تساوي صفراً تكون المعادلة مشخصة، أما إذا كانـــت كافـــة قيم المحددات ذات الرتبة (S-1) مساوية إلى الصفر فان المعادلة تكون غير مشخصة.

ويجـــب الإشارة هنا إلى ان المنظومة الهيكلية تكون غير مشخصة إذا كانت واحـــدة أو اكـــثر من معادلاتها غير مشخصة، وهذا النوع من النماذج لا يمكن تقدير معلماتـــه بأي أسلوب من أساليب القياس الاقتصادي. أما إذا كانت معادلات المنظومة مشخصـــة تمامـــاً، عندها تكون المنظومة ككل مشخصة تماماً ويمكن تقدير معلماتها الهيكلية بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS).

ومن ناحية أخرى إذا كانت معادلات المنظومة فوق التشخيص، فيمكن تقدير معلماتها الهيكلية بواسطة طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS)، طريقة المتغيرات الأداتية (IV)، وطريقة الإمكان الأعظم (MLE).

ولتوضيح عملية التشخيص نأخذ المثال الآتي:

**مثال (1.9):** شخّص كل معادلة من معادلات المنظومة الآتية:

$$Y_1 = 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1$$
$$Y_2 = Y_3 + X_3 + U_2$$
$$Y_3 = Y_1 - Y_2 - 2X_3 + U_3$$

**الحـــل:**

نعيد كتابة النموذج الهيكلي بعد دمج المتغيرات الداخلية مع الخارجية وكالآتي:

$$-Y_1 + 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1 = 0$$
$$-Y_2 + Y_3 + X_3 + U_2 = 0$$
$$-Y_3 + Y_1 - Y_2 - 2X_3 + U_3 = 0$$

ولغرض الحل لابد من القيام بما يلي:

1- إهمـــال الأخطـــاء العشـــوائية وأعـــاده كتابة المعلمات الهيكلية بدلالة كافة المتغيرات في المنظومة للحصول على ما يلي:

**جدول 2.9: هيكل النموذج**

| المعادلة | المتغيـــــــرات | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| 1 | −1 | 3 | 0 | −2 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | −1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | −1 | −1 | 0 | 0 | −2 |

2- وبتحويلها إلى صيغة مصفوفة من خلال إيجاد مصفوفة المعاملات، نحصل على:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. الاختبارات المطلوبة:

**أولاً:** اختبار شرط الدرجة، وصيغة الاختبار هو:

$$K - M \geq S - 1$$

حيث أن:

$$K = 6 \;,\; S = 3$$

أ- بالنسبة للمعادلة الأولى:

$$6 - 4 \;,\; 3 - 1$$

المعادلة مشخصة تماماً، 2 = 2.

ب- بالنسبة للمعادلة الثانية:

$$6 - 3 \;,\; 3 - 1$$

المعادلة فوق مستوى التشخيص، 2 < 3.

جـ- بالنسبة للمعادلة الثالثة:

$$6 - 4 \;,\; 3 - 1$$

المعادلة مشخصة تماماً، 2 = 2.

**ثانياً:** اختبار شرط الرتبة:

ويتم ذلك بإنشاء جدول المتغيرات الخارجية والتي لم تظهر في المعادلة المراد تشخيصها وكما يأتي:

**جدول 3.9: المتغيرات الخارجية**

| −1 | 3 | 0 | −2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | −1 | −1 | 0 | 0 | −2 |

ويـــتم ذلـــك مـــن خلال شطب الصف الخاص بالمعادلة المراد تشخيصها، ثم شطب الأعمدة التي تظهر متغيراتها في هذه المعادلة وكما يأتي:

أ- بالنسبة للمعادلة الأولى:

نشطب الصف الأول من الجدول أعلاه وكذلك العمود الأول والثاني، نحصل علـــى المصفوفة الفرعية $[Z_1]$ من المصفوفة [A] التي تم تشخيصها بالاعتماد على العمودين (3) و(6) لاحتوائها على أصفار في الصف الأول الخاص بالمعادلة الأولى أو $Y_1$. ومن ثم أيجاد المحدد لهذه المصفوفة.

$$|Z_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = [(1)(-2)] - [(-1)(1)] = -2 + 1 = -1$$

بما ان قيمة المحدد لا تساوي صفر، أذاً المعادلة الأولى مشخصة تماماً.

ب- بالنسبة للمعادلة الثانية:

نأخذ المصفوفة الفرعية $Z_2$ من المصفوفة [A] بالاعتماد على الأعمدة (1) و(4) و(5) وذلك لاحتوائها على أصفار في الصف الثاني الخاص بالمعادلة الثانية او $Y_2$ وكما يأتي:

$$|Z_2| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

وبما ان هذه المصفوفة غير مربعة أذاً نجزئها إلى عدد من المصفوفات الفرعية، وكما يأتي:

$$|Z_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(-2) = 0 + 2 = 2$$

$$|Z_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(1) = 0 - 2 = -1$$

$$|Z_{23}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(0) - (1)(0) = 0 - 0 = 0$$

وبما ان هناك على الأقل واحدة من قيم هذه المحددات للمصفوفة $Z_2$ لا تساوي صفراً، لذا فان المعادلة الثانية مشخصة تماماً.

جـ- أما بالنسبة للمعادلة الثالثة:

فنأخذ المصفوفة الفرعية $Z_3$ من المصفوفة [A] بالاعتماد على العمودين 4 و5 لاحتوائها على أصفار في الصف الثالث الخاص لـ(3) أو $Y_3$، وكما يأتي:

$$|Z_3| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(0) - (0)(1)$$
$$= 0 - 0 = 0$$

بما أن قيمة محدد هذه المصفوفة تساوي صفر فأن المعادلة الثالثة غير مشخصة.

## الأسئلة والتماريـــن

**السؤال 1.9:** إذا كان نموذج المعادلات الآنية الآتي:

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 Y_3 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e_1$$

$$Y_2 = \alpha_3 + \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 Y_2 + \beta_3 X_3 + e_2$$

$$Y_3 = \alpha_6 + \alpha_7 Y_1 + \alpha_8 Y_2 + e_3$$

**المطلوب:** باستخدام شرط الدرجة ، هل ان المعادلات في النموذج أعلاه:

أ- مشخصة تماماً.

ب- لها تشخيص علوي.

جـ- لها تشخيص سفلي.

د- غير مشخصة.

**السؤال 2.9:** إذا توفرت لديك المعلومات الآتية عن نموذج السوق:

دالة الطلب $Q_d = B_0 + B_1 P + B_2 X$

دالة العرض $Q_s = \alpha_1 + \alpha_2 P$

شرط التوازن $Q_d = Q_s$

**المطلوب:**

أ - اشتق شرطي الرتبة والدرجة للتشخيص.

ب- حدد نوع التشخيص لمعادلات العرض والطلب في نموذج السوق.

**السـؤال 3.9:** اكتـب نموذج توازن السوق لسلعةٍ ما، بحيث تكون معادلات النموذج ذات تشـخيص سـفلي أو علـوي، ثـم اشرح ذلك في ضوء النظرية الاقتصادية الجزئية.

# الفصل العاشر: المتغيرات المرتدة زمنياً

# The Lagged Variables

# الفصل العاشر: المتغيرات المرتدة زمنيـــاً

# The Lagged Variables

## 1.10 المقدمـــــــــــــة:

في نموذج الانحدار الخطي البسيط المنتظم يرتبط المتغير التابع ($Y_i$) بالمتغير المســتقل ($X_i$)، وفي سياق السلسلة الزمنية يعني ذلك ان قيم Y و X يمكن قياسها في الفترة الزمنية نفسها ، لكن السلوك الاقتصادي يكون متحركاً وربما يحدث الأثر بشكل جوهري بعد سببه، مثال ذلك أنفاق الأسر على الاستهلاك لا يعتمد فقط على مستوى الدخل الجاري بل يعتمد على مستوى الدخل في السنوات السابقة، وهذا يعني ان حالة اســتجابة المتغير التابع للمتغيرات المستقلة تتباطأ وتنتشر عبر الزمن. وحيث تعرف تلك النماذج بالمتغيرات المرتدة زمنياً.

## 2.10 مفهوم النموذج المرتد زمنياً:

يعرف النموذج المرتد زمنياً بأنه ذلك النموذج الذي يحتوي على قيم متغيرات مــرتدة زمنياً، سواء أكانت تلك المتغيرات داخلية أم خارجية على ان تكون، من بين المتغيرات التي يحتويها النموذج.

### الصياغة الرياضية للنموذج المرتد زمنياً:

بشكل عام يمكن كتابة الصيغة العامة لنموذج الارتداد الزمني كالآتي:

$$Y_t = a + B_0X_t + B_1X_{t-1} + B_2X_{t-2} + \ldots + B_sX_{t-s} + U_t \qquad \ldots(1.10)$$

ويوضح النموذج أعلاه العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي ($Y_t$) كمتغير تابع والدخل ($X_t$) كمتغير مستقل واحد، فضلاً عن ذلك يبين النموذج آثار المتغير المستقل ($X_t$)

خلال فترات زمنية سابقة $(t-1, t-2, t-3,\dots,s)$ على المتغير التابع $(Y_t)$، حيث تشير $B_0$ إلى التأثير المعلوم، وذلك لأنه يعطي متوسط التأثير على المتغير التابع $(Y_i)$ خلال الفترة الزمنية نفسها، وتشير المعلمات $B_1$ و$B_2$ إلى التأخر الزمني الذي يقيس متوسط التأثير على المتغير التابع $(Y_i)$ عندما يتغير $(X_i)$ بوحدة واحدة خلال الفترات الزمنية السابقة، وان $(U_t)$ هو المتغير العشوائي.

وتعــود تسمية النماذج القياسية بنماذج الارتداد الزمني إلى كون تأثير المتغير المستقل فيها على المتغير التابع يتوزع عبر عدد من قيم المتغير المستقل (X) المرتد زمنــياً ولـــــ(S) من فترات الارتداد الزمني أي قد تكون محدودة Finite، او غير محدودة Infinite، ويمكن كتابة النموذج (1.10) كالآتي:

$$Y_t = a + b_0 X_t + \sum_{i=1}^{s} b_i X_{t-s} + U_t \qquad \dots(2.10)$$

حيث : a ، $b_0$ ، $b_i$ المعلمات المراد تقديرها.

ولنفـــترض ان $b_s$ تحتوي على عدد محدد من فترات الارتداد الزمني أو عدد معين من السنوات (S) أي ان:

$$\sum_{i=0}^{s} b_i < \infty \qquad \dots(3.10)$$

عليه فأن معدل الارتداد الزمني الذي يمثل متوسط جميع أوزان الارتداد التي يحتويها الـــنموذج بالارتـــباط مع الوزن النسبي لكل معلمات b على التوالي. يُمكن كتابته كما يلي:

$$A\ var age\ \ lag = \frac{\sum_{i=0}^{s} i b_i}{\sum_{i=0}^{s} b_i} \qquad (i = 0,1,2,\dots,s) \qquad \dots(4.10)$$

هذا وتعد المتغيرات المرتدة زمنياً متغيرات مستقلة مهمة جداً في معظم العلاقات الاقتصادية؛ ذلك لأن السلوك الاقتصادي لكل فترة زمنية محددة يتأثر إلى حدٍ ما بنمط السلوك السائد في الفترة السابقة، كما وتعد نماذج الارتداد الزمني من النماذج المهمة جداً في عملية اتخاذ القرار، إذ تمكن من معرفة الفترة الزمنية التي ستكون فيها الوحدات الاقتصادية قادرة على الاستجابة للقرارات التي تُتخذ بشأن الانتاج، المبيعات، ...الخ.

**مثال 1.10:** بافتراض ان الفترة $(n = 2)$ في النموذج (1.10) وانه تم تقدير النموذج وكانت النتائج كما يلي:

$$\hat{Y}_t = 55.02 + 0.4X_t + 0.3X_{t-1} + 0.2X_{t-2}$$

فأن معدل الارتداد الزمني، هو:

$$A\,var\,age\;\;lag = \frac{\sum_{i=0}^{s} ib_i}{\sum_{i=0}^{s} b_i} = \frac{0(0.4) + 1(0.3) + 2(0.2)}{2} = 0.36$$

فالأثـــر فـــي الأجل القصير (الميل الحدي للاستهلاك في الأجل القصير) على الأنفاق الاســـتهلاكي نتـــيجة زيادة الدخل المتاح بدينار واحد هو (0.4) وهذا يعني ان زيادة الدخـــل الشخصـــي المتاح للأنفاق على الاستهلاك بدينار واحد يترتب عليه زيادة في الأنفاق الاستهلاكي الشخصي في السنة نفسها بمقدار (400) فلساً.

أمـــا الأثر طويل الأجل (الميل الحدي للاستهلاك طويل الأجل) على الأنفاق الاستهلاكي، يساوي:

$$\sum b_i = b_0 + b_1 + b_2 = 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9$$

ويعنـــي ذلك ان زيادة الدخل الشخصي المتاح للأنفاق بدينار واحد يترتب عليه زيادة في الأنفاق الاستهلاكي الشخصي بمقدار (900) فلساً.

## 3.10 أسباب وجود الارتداد الزمني:

هـــناك أسباب عدة لظهور الارتداد الزمني في نماذج الاقتصاد القياسي، نذكر أهمها ما يأتي:

أ- الأسباب النفسية أي بسبب العادات والتقاليد الاستهلاكية.

ب- الأسباب الفنية التي تحدث خلال بعض التغيرات المتعلقة بالانتاج، كالتغيرات في الأســعار والأجور، وكذلك فأن عرض المنتجات الزراعية يعتمد على متغيرات عديدة منها الأسعار في الفترات الزمنية السابقة.

جـــ- والسبب الآخر لوجود الارتداد الزمني، يرجع إلى السبب المؤسسي والتشريعي الحكومي التي تساهم في إحداث الارتداد الزمني، مثال ذلك، قد تحول التشريعات الحكومـــية المنتج من استخدام العمل إلى استخدام عنصر آخر، وبهذا فأنها تؤثر في اتخاذ القرار.

ولهـــذه الأســـباب فأن الارتداد الزمني يمثل مركزاً رئيساً في الاقتصاد لانه يؤثر في التحليل الاقتصادي سواء كان في الأجل القصير او الأجل الطويل، مثلاً نقول ان الميل الحـــدي للاســـتهلاك MPC، فـــي الأجل القصير اقل منه في الأجل الطويل بوجود الارتـــداد الزمنـــي في العوامل المؤثرة على الاستهلاك وكذلك فان مرونة الدخل في الأجـــل القصـــير تكـــون صغيرة في القيمة المطلقة مقارنة بمرونة الدخل في الأجل الطويل.

## 4.10 تقدير نماذج الارتداد الزمني:

سيتم مناقشة أهم نماذج الارتداد الزمني، وهي:

### 1.4.10 نموذج كويك، KOYCH:

يفـــترض كويك بأن أوزان المتغيرات المستقلة المرتدة زمنياً تتناقص تدريجياً بمتوالية هندسية حسب القانون الآتي:

$$B_j = B_0 \lambda^j \qquad (j = 0, 1, 2, .....) \qquad ...(5.10)$$

حيث ان: $0 < \lambda < 1$

و $\lambda$ هو معامل التباطؤ، ويُعرف بسرعة الاستجابة، ويوضح شرط المتوالية الهندسية الســـابقة، ان المعلمات $B_j$ تتناقص بصورة مستمرة ، إذ ان $\lambda < 1$ فكلما بعد الزمن كلما قل تأثير المتغير المرتد الزمني على المتغير التابع. ويشتق نموذج كويك للارتداد الزمني ذو المتغيرات الداخلية من النموذج الأصلي الذي يحتوي على متغير خارجي مرتد زمنياً فقط ووفق الصيغة الآتية:

$$Y_t = a + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + ... + B_s X_{t-s} + U_t \qquad ...(6.10)$$

حيث ان:

$$U_i \sim N(0, \sigma_u^2)$$

وان $B_j$ تتناقص تدريجياً بشكل متوالية هندسية أي ان:

$$B_1 = \lambda B_0$$
$$B_2 = \lambda^2 B_0$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$B_i = \lambda^i B_0$$

وبالتعويض في المعادلة (6.10):

$$Y_t = a + B_0 X_t + \lambda B_0 X_{t-1} + \lambda^2 B_0 X_{t-2} + ... + U_t \qquad ...(7.10)$$

وبجعل النموذج أعلاه مرتد لفترة زمنية واحدة فأن:

$$Y_{t-1} = a + B_0 X_{t-1} + \lambda B_0 X_{t-2} + \lambda^2 B_0 X_{t-3} + ... + U_{t-1} \qquad ...(8.10)$$

وبضرب طرفي المعادلة في $\lambda$ ، نحصل على:

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda a + \lambda B_0 X_{t-1} + \lambda^2 B_0 X_{t-2} + \lambda^3 B_0 X_{t-3} + ... + \lambda U_{t-1} \qquad ...(9.10)$$

وبطرح معادلة (9.10) من معادلة (7.10) نحصل على:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a - \lambda a + B_0 X_t + U_t - \lambda U_{t-1} \qquad ...(10.10)$$

ويمكن ترتيبها كما يلي:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a(1-\lambda) + B_0 X_t + U_t - \lambda U_{t-1} \qquad ...(11.10)$$

وبالمناقلة والترتيب ، نحصل على:

$$Y_t = a(1-\lambda) + B_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t \quad ...(12.10)$$

حيث ان:

$$V_t = (U_t - \lambda U_{t-1})$$

وهو حد الخطأ الجديد.

كمـــا يمكـــن كتابة نموذج KOYCK بصورة مختصرة بعد حذف الحد الثابت، وكما يأتي:

$$Y_t = B_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t$$

وتســـمى هذه الصيغة بتحويلة، Transformation، كويك، وعليه فان تحويلة كويك أعـــلاه تســـتخدم فـــي نقـــل النموذج الأصلي والذي يحتوي على عدد لا نهائي من المتغـــيرات المستقلة المرتدة زمنياً إلى نموذج يحتوي على متغيرين مستقلين فقط هما $X_t$ و $Y_{t-1}$ كمـــا تناقصـــت عدد المعلمات التي يراد تقديرها من العدد اللانهائي في الـــنموذج الأصلي إلي ثلاث معلمات فقط في نموذج كويك المحول هي a، $B_0$، $\lambda$. وبتطبيق طريقة OLS يُمكن تقدير معادلة كويك للحصول على المقدرات $\hat{a}$، $\hat{B}_0$، $\hat{\lambda}$ ثم نجري استعادة تقديرات المعلمات الأصلية $B_j$ بتطبيق القانون:

$$B_j = B_0 \lambda^j \quad ...(13.10)$$

$$(j = 0,1,2,...,\infty)$$

فعلى سبيل المثال:

$$\text{At } j = 0;$$

$$\hat{B}_0 = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^0$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \hat{B}_0 \quad , \quad \lambda^0 = 1$$

At j = 1;

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_0\hat{\lambda}^1$$
$$\therefore \hat{B}_1 = \hat{B}_0\hat{\lambda}$$

At j = 2;

$$\hat{B}_2 = \hat{B}_0\hat{\lambda}^2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\hat{B}_\infty = \hat{B}_0\hat{\lambda}^\infty$$

فإذا قدرنا على سبيل المثال المعادلة (12.10) كما يأتي:

$$\hat{Y}_i = 64 + 0.3X_i - 0.6X_{i-1} \qquad ...(14.10)$$

عندئذٍ سنعتمد B=0.3 و $\lambda = 0.6$ ، فإن:

$$\hat{a} = \frac{a}{(1-\hat{\lambda})} = \frac{64}{1-0.6} = 160$$

وعند تعويض هذه المعاملات في المعادلة (6.10)، يمكن الحصول على:

$$\hat{Y}_i = 160 + 0.3X_i + 0.18X_{i-1} + 0.108X_{i-2} \qquad ...(15.10)$$

استناداً إلى العرض السابق للنموذج، يمكن إثارة الملاحظات الآتية:

- إنـــنا بدأنا بنموذج متغيرات مرتدة زمنياً موزعة بصورة لا نهائية، غير انه تحول إلى نموذج انحدار ذاتي لــ $Y_t$ على $X_t$ و $Y_{t-1}$.

- ان المتغـــير الـــتابع المرتد زمنياً يظهر ضمن المتغيرات المستقلة مما يخرق الفـــرض اللازم للحصول على مقدرات OLS المنادية بثبات قيم المتغيرات المستقلة في المعاينات المتكررة.
- إن حـــد الخطأ العشوائي الخاص بالنموذج الأصلي هو $U_t$ بينما حد الخطأ الخاص بنموذج كويك المحول هو $V_t$ فإذا كانت $U_t$ الأصلية لا تترابط ذاتياً حسب فروض OLS فان $V_t$ لا تحتفظ بتلك الخاصية.

ونتـــيجة لعشـــوائية $Y_{t-1}$ وعدم استقلال $V_t$ عن قيمها السابقة تنتهك فروض OLS العاديـــة ممـــا يقود إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة لنموذج كويك المتخلف زمنياً.

### 2.4.10 نموذج التوقع المكيف لــCAGAN:

يقودنا هذا النموذج إلى بقاء الارتداد الزمني بشكل فعلي متطابق مع نموذج كويـــك (6.10)، غير ان المتغير $Y_t$ يعتمد على القيم المتوقعة أو الدائمة للمتغير $X^*$ وليست على القيمة الحقيقية لــX. لذلك يستخدم نموذج CAGAN للتوقع المكيف في الـــنموذج ذاتي الانحدار والذي يكون المتغير المستقل فيه له قيم متوقعة مثلى، ويمكن كتابة هذا النموذج بالصيغة الآتية:

$$Y_i = a + BX_i^* + U_i \qquad \text{......(16.10)}$$

حيث ان:

$Y$: تمثل الكمية المطلوبة من سلعةٍ ما.

$X^*$: تمثل السعر المتوقع للسلعة.

$i$ : تمثل الزمن.

$U$: تمثل المتغير العشوائي.

ان التفسير الأكثر شيوعاً لـــ $X^*$ في النظرية الاقتصادية، أنه يمثل الدخل الدائم فـــي نظـــرية فريدمان للاستهلاك، وكذلك في دالة الطلب على النقود، وبما ان $X^*$ مجهولـــة، أي لا تـــتوفر عـــنها بيانات، لذلك نحتاج إلى كيفية تحديدها، وبالتالي فان المعادلة (16.10) لابد وان ترتبط ببعض الافتراضات عند تكوينها، والفرضية العامة لها هي التوقعات المكيفة التي تأخذ خطة دقيقة لتحديد قيمة $X^*$، وكما يأتي:

$$X_i^* - X_{i-1}^* = \mu(X_i - X_{i-1}^*) \qquad ...(17.10)$$

حيث أن: $0 \leq \mu \leq 1$

لذلـــك فـــان الأفـــراد ســـيزيدون من مشترياتهم عندما يتوقعون ارتفاع الأسعار في المســـتقبل. وعلـــى افـــتراض إن الأسعار المتوقعة هي عبارة عن متوسط للأسعار المرجحة في الفترة الحالية والأسعار المتوقعة في الفترة الزمنية السابقة، أي ان:

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu) X_{i-1}^* \qquad ...(18.10)$$

وان قيمة $\mu$ تقع بين الصفر والواحد الصحيح، وهنا لابد من تحديد ما يأتي:

**أ- عندما تكون** $\mu = 1$:

وهـــذا يعنـــي ان الأسعار المتوقعة تكون دائماً مساوية للأسعار الحقيقية، وتعرف $\mu$ بمعـــامل التوقع المكيف، Adjustment Coefficient of Expectation، وتعرف هذه الفرضية أيضاً بفرضية التوقع المتطـــــور، Progressive Expectation، او فرضـــية تعلّم الخطأ Error Learning Hypothesis، إذ ان المعادلتين (17.10) و (18.10) تعرف على أنها فرضية التوقعات المكيفة.

فالمعادلـــة (17.10) تشير إلى ان الدخل الحقيقي في الفترة $X_i$، يفوق الدخل المـــتوقع في الفترة السابقة $X_{i-1}^*$، لذلك فان فكرة توقّع الدخل قد تُعدّل إلى الأعلى،

ومـــن ثم فان الدخل المتوقع في الفترة i ، $(X_i)$ يفوق الدخل المتوقع في الفترة السابقة $X_{i-1}^*$، وان تحديد التعديل يعتمد على حجم معامل التوقع المكيف $\mu$، الواقع بين الصفر والواحد الصحيح.

**ب- عندما تكون $\mu = 1$:**

فـــان التعديل يكون قد تم بسبب ان $X_i^* = X_i$، ولذلك يتطابق الدخل الحقيقي والدخل المتوقع.

**جـــ- عندما $\mu = 0$:**

فـــي هذه الحالة لا يحدث تعديل على الإطلاق، وان الدخل المتوقع يبقى بدون تغيير ويكون غير متأثر بالدخل الحقيقي مهما كان حجمها.

وبشكل عام، يمكن تحديد ما يأتي:

كلما كانت قيمة $\mu$ أكبر كلما كان امتداد التعديل اكبر، ويمكن ملاحظة ذلك، انـــه عـــند التعويض في المعادلة (18.10) لـــ$(X_{i-1}^*)$، $X_{i-2}^*,...,X_{i-n}^*$ يترتب عليه ما يأتي:

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^*$$

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^* + (1-\mu)^3 X_{i-3}^*$$

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^* + (1-\mu)^3 X_{i-3}^* + (1-\mu)^4 X_{i-4}^* \ldots \quad \textbf{(19.10)}$$

وهكـــذا لتحديد الدخل المتوقع، فان معظم الأوزان قد أعطيت إلى الدخل الجاري $X_i$، وقد تم انحدار الأوزان بشكل ناجح إلى المستويات السابقة للدخل، $X_{i-1}$، $X_{i-2}$، $X_{i-3}$، وبتعويض المعادلة (19.10) في المعادلة (16.10)، نحصل على:

$$Y_i = a + B\mu[X_i + (1-\mu)X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2} + ...] \qquad ...(20.10)$$

حيـــث إن المعادلـــة (20.10) تتطابق مع المعادلة (6.10) لنموذج الارتداد الزمني لكويك، وان:

$$b = (1-\mu) \quad , B\mu = b$$

وباســتخدام تحويل CAGA بارتداد زمني لفترة واحدة، كما في المعادلة (20.10) أولاً وبضـــرب طرفـــي المعادلـــة في $(1-\mu)$ ثانياً. ثم بطرح النتيجة من المعادلة (20.10) نحصل على ما يلي:

$$Y_i = a\mu + B\mu X_i + (1-\mu)Y_{i-1} + U_i - (1-\mu)U_{i-1} \qquad ...(21.10)$$

وتأسيســاً على ذلك، إذا توقعنا افتراض التوقعات المكيفة، فانه لتعديل معادلة التقدير (14.10) سوف نقترح ما يأتي:

$$1 - \hat{\mu} = 0.6$$

لان $\hat{\mu} = 0.4$ وان:

$$\hat{B} = \frac{0.3}{\hat{\mu}} = \frac{0.3}{0.4} = 16$$

وهكذا يمكن تقدير العلاقات السلوكية للمعادلة (16.10) كما يأتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{B} X_i^* + e_i$$

$$\hat{Y}_i = 160 + 0.75 X_i^* \qquad ...(22.10)$$

وان معامل التعديل المكيف في معادلة التوقعات المعدلة (17.10) هو 0.4، هذه القيمة يمكن استخدامها بأنها تمثل 40% لأي اختلاف بين الدخل الحقيقي والدخل المتوقع.

**مـــثال 2.10**: إذا توفرت البيانات الآتية عن الكمية المطلوبة من سلعة ما (Y) والسعر الحقيقي لتلك السلعة (X) كما في الجدول الآتي:

| i | Y | X |
|---|---|---|
| 1 | 30.6 | 125 |
| 2 | 31.6 | 140 |
| 3 | 31.3 | 130 |
| 4 | 33.3 | 155 |
| 5 | 33.5 | 145 |
| 6 | 33.2 | 163 |
| 7 | 36.7 | 170 |
| 8 | 38.6 | 182 |
| 9 | 39.0 | 173 |
| 10 | 40.8 | 192 |
| 11 | 42.7 | 203 |
| 12 | 41.9 | 178 |
| 13 | 40.2 | 163 |
| 14 | 40.7 | 182 |
| 15 | 40.4 | 175 |

**المطلوب**: تقدير المعادلة (16.10)، وكيف يمكن إيجاد السعر المتوقع للسلعة X؟

**الحل:**

أ- لا يمكـــن تقدير المعادلة (16.10) من البيانات في الجدول أعلاه، بسبب ان قيمة $X_i^*$ غير معلومة، لذلك لابد من إيجادها أولاً ومن ثم يمكن تقدير النموذج.

ب- إيجاد السعر المتوقع $X_i^*$ من خلال الخطوات الآتية:

1- باستخدام طريقة OLS وتطبيقها على المعادلة (21.10) نحصل على:

$$\hat{Y}_i = 1.95825 + 0.0805855X_i + 0.598679Y_{i-1}$$

$$\therefore (1-\hat{\mu}) = 0.598679$$

$$\hat{\mu} = 1 - 0.598679$$

$$\hat{\mu} = 0.401321$$

وان:

$$\hat{a}\hat{\mu} = 1.95825$$

$$\hat{a} = \frac{1.95825}{\hat{\mu}}$$

إذن:

$$\therefore \hat{a} = \frac{1.95825}{0.401321} = 4.87951$$

وان:

$$\hat{B}\hat{\mu} = 0.0805855$$

$$\hat{B} = \frac{0.0805855}{\hat{\mu}}$$

$$\therefore \hat{B} = \frac{0.0805855}{0.401321} = 0.20080$$

وباستخدام المعادلة (16.10)، يمكن إيجاد قيمة $X_i^*$، وكما يأتي:

$$Y_i = a + BX_i^* + U_i$$
$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{B}X_i^* + e_i \qquad ...(23.10)$$

وبإعادة ترتيب (23.10) أعلاه، نحصل على:

$$\hat{B}X_i^* = Y_i - \hat{a}$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $\hat{B}$، نحصل على:

$$X_i^* = \frac{Y_i - \hat{a}}{\hat{B}}$$

وبتعويض قيم $(Y_i)$ الواردة في الجدول، نحصل على:

$$X_1^* = \frac{30.6 - 4.87951}{0.20080} = 128.1$$

$$X_2^* = \frac{31.6 - 4.87951}{0.20080} = 133.1$$

$$X_3^* = \frac{31.3 - 4.87951}{0.20080} = 131.6$$

وهكذا نحصل على بقية قيم $X_i^*$ من الجدول السابق.

$$X_{15}^* = \frac{40.4 - 4.87951}{0.20080} = 176.9$$

### 3.4.10 نموذج التعديل الجزئي لـ"نيرلوف" Nerlov's:

يفــترض نيرلوف ان المستوى المرغوب للمتغير (Y) في الفترة الزمنية (t) يعتمد على قيمة (X) في الفترة الزمنية (t)، مضافاً إليه المتغير العشوائي $U_i$، وبذلك يــأخذ المتغــير التابع (Y) قيمة متوقعة مثلى حيث يمكن ان نرمز له بالرمز $(Y_t^*)$ وكما في النموذج الآتي:

$$Y_t^* = B_0 + B_1 X_t + U_1 \qquad \ldots(24.10)$$

حيث ان:

$Y_t^*$ : تمثل الرصيد الأمثل او المخطط لرأس المال.

$X_t$: تمثل الناتج.

$U_t$: تمثل المتغير العشوائي.

t : الفترة الزمنية.

وبموجـــــب نمــوذج التعديل الجزئي لنيرلوف او ما يسمى بنموذج تعديل الرصيد The Stock Adjustment Model، فان التغير في خزين رأس المال إلى المستوى الأمثل $(Y_t^*)$ يمثل في حقيقته التغير المتحقق في خزين رأس المال في كل فترة، لذلك مــن الطبيعي ان $Y_t$ و $(Y_t^*)$ ليست نفسها، بمعنى آخر فان تعديل (Y) الحقيقية إلى التغــير فــي (X) لا يحصــل بشكل فوري بل ربما يكون حصيلة التقدم التكنولوجي والقــرارات الإداريـــة والمالية التي تقدم عليها المنشأة أو الدولة في مجال الاستثمار، وعليه فان معادلة التعديل تأخذ الصيغة الرياضية الآتية:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda(Y_t^* - Y_{t-1}) + V_t \qquad \ldots(25.10)$$

$$0 < \lambda < 1$$

$\lambda$: تمــثل معـــامل الـــتعديل، Coefficient of Adjustment، وتقيس مدى اقــتراب او ابــتعاد $Y_t$ الحالـــية عن السابقة $Y_{t-1}$، وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح.

$Y_t - Y_{t-1}$: تمثل التغير الفعلي.

$Y_t^* - Y_{t-1}$: تمثل التغير المرغوب فيه.

$V_t$: تمثل حد الخطأ.

وبطرح معادلة (24.10) من معادلة (25.10) نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda\left[(B_0 + B_1X_t + U_t) - Y_{t-1}\right] + V_t \qquad \ldots(26.10)$$

وبفك الأقواس والترتيب، نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda B_0 + \lambda B_1X_t - \lambda Y_{t-1} + \lambda U_t + V_t$$

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1X_t + Y_{t-1} - \lambda Y_{t-1} + \lambda U_t + V_t$$

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1X_t + (1-\lambda)Y_{t-1} + (\lambda U_t + V_t) \qquad \ldots(27.10)$$

هــذه المعادلة توضح ان ($Y_t$) الرصيد من رأس المال في الفترة (t) يعتمد في جزء مــنه علـــى مســتوى الإنتاج في تلك الفترة ($X_t$) وفي الجزء الآخر على التوسع في الرصيد، كما وان درجة التعديل والسرعة التي تمكن تعديل (Y) إلى (X) عبر الفترة الزمنـــية تعـــتمد على حجم معامل التعديل ($\lambda$)، فكلما كانت ($\lambda$) اكبر كلما كانت ســـرعة التعديل اكثر، أي يتساوى رأس المال الحالي مع رأس المال المرغوب فيه، وكلما كانت اصغر كلما صغر التعديل في الفترة الجارية، مما يدل على اقتراب رأس المال القائم من السابق، فعندما $\lambda = 1$ ، معنى ذلك ان الرصيد الحقيقي لرأس المال

سـوف يكـون دائماً مساوياً للرصيد المخطط منه، وعندما تكون $\lambda = 0$ فان $Y_t=Y_{t-1}$ ولا يكون هناك أي تعديل على الإطلاق.

وبمقارنة نموذج نيرلوف (معادلة 27.10) مع نموذج كويك (معادلة 12.10) يتضـح بان كلاهما يحتويان على المتغيرات نفسها $(Y_{t-1}, X_t, Y_t)$ غير ان حد الخطأ فـي نموذج نيرلوف لا يحتوي على أي شكل من أشكال التعدد الخطي كما هو الحال في نموذج كويك، كما ان حد الخطأ $(\lambda U_t + \lambda V_t)$ لا يرتبط خطياً.

**مثال 3.10**: إذا توفرت لديك البيانات الآتية:

| الفترة<br>i | الأنفاق الاستثماري المخطط<br>$Y_i$ | المبيعات<br>$X_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 20 |
| 2 | 9 | 19 |
| 3 | 10 | 21 |
| 4 | 11 | 23 |
| 5 | 13 | 25 |
| 6 | 20 | 27 |
| 7 | 24 | 30 |
| 8 | 19 | 32 |
| 9 | 24 | 34 |
| 10 | 26 | 40 |

**المطلـوب**: تقدير معلمات نموذج التعديل الجزئي قصيرة وطويلة الأجل لدالة الطلب على الأنفاق الاستثماري.

**الحـل**: نتبع الخطوات الآتية:

أ- صياغة نموذج التعديل، كما جاء في المعادلة (27.10)، وهي:

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t + (1-\lambda)Y_{t-1} + (\lambda U_t + V_t)$$

ب- تطبـــيق طـــريقة OLS على المعادلة اعلاه، مستخدماً البيانات في الجدول أعلاه ومنها نحصل على:

$$\hat{Y}_t = -7.33 + 0.095X_t + 0.83X_{t-1}$$

وتمثل هذه الدالة دالة الطلب قصيرة الأجل. ولإيجاد قيم $B_0$، $B_1$ نتبع ما يأتي:

$$(1-\hat{\lambda}) = 0.83$$

$$\therefore \hat{\lambda} = 1 - 0.83 = 0.17$$

$$\lambda\hat{B}_0 = -7.33$$

وان:

$$\therefore \hat{B}_0 = \frac{-7.33}{0.17} = -43.12$$

$$\lambda\hat{B}_1 = 0.095$$

وان:

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{0.095}{0.17} = -0.5588$$

ومن ثم يمكن تقدير دالة الطلب في الأجل الطويل وكما يأتي:

$$\overset{*}{Y}_t = -43.12 - 0.5588X_t$$

### 4.4.10 نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لـــ"ألمون" ALMON:

يفترض ألمون ان معلمات النموذج المقدرة $B_i$ تأخذ شكل التوزيع متعدد الحدود. فقد افترض ألمون ان أقصى ارتداد زمني هو (m)، أي:

$$Y_t = a + B_0X_t + B_1X_{t-1} + B_2X_{t-2} + \ldots + B_mX_{t-m} + U_t \quad \ldots(28.10)$$

$$Y_t = a + \sum_{i=0}^{m} B_iX_{t-i} + U_t$$

وان $B_i$ تتوقف على درجة الحدود، فمثلاً بافتراض أربع فترات ارتداد، فان الصياغة تكون:

$$Y_t = a + B_0X_t + B_1X_{t-1} + B_2X_{t-2} + B_3X_{t-3} + B_4X_{t-4} + U_t \quad \ldots(29.10)$$

$$B_i = C_0 + C_{1i} + C_{2i}^2 + C_{3i}^3$$

حيث ان: (i= 0,1,2,3,4)

وبالتعويض في المعادلة (28.10) نحصل على:

$$Y_t = a + C_0X_t + (C_0 + C_1 + C_2 + C_3)X_{t-1} + (C_0 + 2C_1 + 4C_2 + 8C_3)X_{t-2}$$
$$+ (C_0 + 3C_1 + 9C_2 + 27C_3)X_{t-3} + (C_0 + 4C_1 + 16C_2 + 64C_3)X_{t-4} + U_t$$

وبإعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$Y_t = a + C_0(\sum_{i=0}^{4} X_{t-i}) + C_1(\sum_{i=0}^{4} iX_{t-i}) + C_2(\sum_{i=0}^{4} i^2X_{t-i}) + C_3(\sum_{i=0}^{4} i^3X_{t-i})\, U_t$$

وإذا رمزنا للمتغيرات المستقلة الجديدة بالرموز الآتية $Z_{1t}$، $Z_{2t}$، $Z_{3t}$، $Z_{4t}$ على الترتيب، نحصل على:

$$Y_t = a + C_0 Z_{1t} + C_1 Z_{2t} + C_2 Z_{3t} + C_3 Z_{4t} + U_t \qquad \ldots(30.10)$$

وتعد المعادلة (30.10) انحدار متعدد منظم، وان التقديرات التي نحصل عليها لقيم $C_0$، $C_1$، $C_2$، $C_3$، $C_4$، تكتسب خصائص التقدير الجيد.

ويجب هنا ملاحظة تحديد كل من درجة الحدود وطول فترة الارتداد الزمني قبل البدء بتطبيق طريقة ألمون ويلاحظ هنا ان المعادلة (29.10) تستخدم فقط لتحديد المعلمات للنموذج لقيم (i) من الصفر إلى (m)، اي ان (i=0,1,2,3,...,m) وان معلمات نموذج الارتداد الزمني خارج هذا المجال يمكن تحديدها بان نساويها بالصفر. وعند مقارنة نموذج ألمون للارتداد الزمني مع نموذج كويك للارتداد الزمني نحصل على ميزتان هامتان:

**الأولى**: ان لنموذج ألمون هيكل ارتداد زمني مرن على عكس هيكل الارتداد الزمني الجامد لنموذج كويك.

**الثانية**: ان نموذج ألمون لا يستبدل متغيرا تابعاً مرتداً زمنياً بالمتغيرات المستقلة المرتدة زمنياً، فانه لا يخرق أياً من فروض OLS كما يفعل نموذج كويك.

أما عيوب نموذج ألمون، فهي:

- ان عدد المعلمات اللازم تقديرها لا ينخفض كثيراً كما يحدث في نموذج كويك.
- أنه في الواقع العملي قد لا نستطيع تحديد فترة الارتداد الزمني عن طريق النظرية او بمعلومات مسبقة.

## الأســـئلة والتماريـــن

**السؤال 1.10:** ميز بين طريقة KOYCK وطريقة ALMON فيما يتعلق بالأرتداد الزمنـــي للتغيرات، ثم حدد أيهما افضل عندما تكون سنوات التخلف (10 سنة) (n = 25).

**السؤال 2.10:** افترض لدينا دالة الاستهلاك الآتية:

$$C_t = a + B_0 Y_t + B_1 Y_{t-1} + B_2 Y_{t-2} + U_t$$

وكانت المعادلة التقديرية لها هي:

$$\hat{C}_t = 15 + 0.6Y_t + 0.9Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2} + e_t$$

**المطلوب:**

أ- أيجاد متوسط (معدل) الارتداد الزمني.

ب- ما هو الأثر القصير والطويل الأجل على الأنفاق الاستهلاكي.

**الســـؤال 3.10:** ضـــع علامـــة صـــح( ✓ ) أو خطأ ( X) أمام العبارات الآتية مع تصحيح العبارة الخاطئة:

أ- عـــندما تكون فترات الارتداد الزمني كبيرة نسبة إلى حجم العينة المدروسة ســـوف تقـــع فـــي مشـــكلة درجات الحرية وبذلك يصبح من الصعب الحصول على تحديد مقدرات دقيقة لمعلمات النموذج.

ب- ان من أسباب الارتداد الزمني هو أسباب نفسية وليست فنية.

جـــ- ان الارتداد الزمني يعود إلى التشريع الحكومي والتي تساهم في التخلف الزمني للمتغيرات.

د- يفترض نموذج كويك ان المتغيرات المستقلة تكون سالبة وتتصاعد هندسياً مع الزمن.

هـ- ان فقدان مشاهدة واحدة عند إجراء عملية التقدير نتيجة الارتداد الزمني يرضي الشرط الأول للتقدير.

و- يطلق على نموذج التعديل الجزئي لنيرلوف بنموذج تعديل الرصيد.

ز- يأخذ المتغير التابع في نموذج نيرلوف قيمة متوقعة مثلى.

ح- نطلق على $e_i = \lambda U_i$ باصطلاح نموذج التعديل الجزئي لنيرلوف.

ط-عند وجود نقطة واحدة من نقاط الانقلاب في نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لالمون فأنه يأخذ شكل متعدد الحدود من الدرجة الثانية.

**السؤال 4.10:** ان مستوى الاستهلاك الجاري يتأثر بالدخل الجاري ومستويات الدخول في السنوات السابقة، ويمكن عرض ذلك رياضياً وكما يأتي:

$$C_t = f(Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \ldots, Y_{t-n})$$

**المطلوب:**

أ- اشتق رياضياً أفضل نموذج لدالة الاستهلاك معتمداً نموذج كويك.

ب- ما هي فرضيات نموذج كويك.

**السؤال 5.10:** بيّن أهم الصعوبات التي تواجه الباحث عند بناء نموذج تقديري لنموذج يحتوي على n من فترات الارتداد الزمني.

**السؤال 6.10:** ما المقصود اقتصادياً بنماذج الارتداد الزمني، وما هي الصيغة الرياضية العامة لها عندما يكون لديك هناك (n) من فترات الارتداد الزمني.

**السـؤال 7.10**: هل يكون هناك عدد لانهائي (∞) من فترات الارتداد الزمني في نماذج الارتداد الزمني، وهل يكون ذلك مقبولاً اقتصادياً.

# الفصل الحادي عشر: المتغيرات الوهمية
# Dummy Variables

1.11 المقدمة.

2.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي مستقل واحد.

3.11 نموذج الانحدار المتضمن أكثر من متغير وهمي مستقل.

4.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي تابع.

5.11 الأسئلة والتمارين.

# الفصل الحادي عشر: المتغيـــــرات الوهميـــــة
# Dummy Variables

## 1.11 المقدمـــــــــة:

تضـــمنت الطـــرق التـــي تعرضنا لها في الفصول السابقة استعمال متغيرات اقتصـــادية يجـــري قياســـها كمياً وتتوفر عنها بيانات إحصائية مثل متغيرات السعر، الصادرات، الاستهلاك، الكمية المطلوبة والمعروضة...الخ، غير أنه قد تواجه الباحث أحياناً كثير من المتغيرات لا تتوفر عنها إحصائيات كمية، وقد تكون ضمن مجموعة المتغـــيرات المستقلة او قد تظهر كمتغير تابع على الجانب الأيمن من النموذج المراد قياســـه، وتعرف تلك المتغيرات بالمتغيرات النوعية، Qualitative Variables، او المتغـــيرات الوهمـــية، Dummy Variables، وتعـــبر عـــن صفة معينة كالجنس، الحـــروب، الزلازل، الإضراب وغيرها من الصفات ويتخذ المتغير الوهمي (النوعي) قيمتيـــن فقط (1، صفر)، القيمة واحد للدلالة على وجود الصفه والقيمة صفر للدلالة على عدم وجودها.

تعـــد المتغـــيرات الوهمية ذات أهمية بالغة وكبيرة، فالعلاقات الاقتصادية لا تعتمد على متغيرات يمكن قياسها فقط، بل تعتمد فضلاًعن ذلك على متغيرات وهمية. فالاستهلاك مثلاً لا يتوقف على مستوى الدخل لوحده، بل يتوقف على ما إذا كان البلد في وقت الحرب، War time، أو في وقت السلم Peace time، كذلك الحال بالنسبة للطلب على سلعةٍ ما لا تتوقف على الدخل وحده، بل يعتمد على متغيرات أخرى غير الدخـــل كذوق المستهلك مثلاً، عندما يتغير ذوق المستهلك يتبع ذلك تغيير في الكميات المطلوبـــة مـــن تلـــك السلعة، لذلك لابد من إدخال المتغيرات الوهمية المتعلقة بذوق المســـتهلك إلـــى الـــنموذج الاقتصـــادي المـــراد دراسته وهكذا بالنسبة لبقية النماذج

الاقتصادية الأخرى.

## 2.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي مستقل واحد:

في هذه الحالة يظهر المتغير الوهمي كمتغير مستقل ضمن مجموعة المتغيرات المستقلة، وغالباً ما تظهر تلك المتغيرات في الدراسات التي تعتمد السلاسل الزمنية كقاعدة بيانية وذلك نتيجة لحدوث تغيرات هيكلية كبيرة في مسار الاقتصاد، كما قد تظهر في الدراسات التي تستخدم البيانات المقطعية نتيجة لعدم تماثل الظروف الذاتية والموضوعية بين مختلف الوحدات الاقتصادية المشمولة في العينة.

فعلى سبيل المثال، نتوقع ان تنخفض مستويات ومعدلات الاستهلاك الخاص في دولة ما إذا ما مرّت تلك الدولة بظرف طارئ مثل فترات الحرب او الجفاف وذلك مقارنةً مع فترات السلم او الازدهار والتي غالباً ما ترتفع فيها مستويات ومعدلات الاستهلاك، عليه يصبح من الممكن إدخال متغير مستقل إضافي جديد لدالة الاستهلاك بجانب الدخل ليفسر الفرق بالاستهلاك بين فترتي السلم والحرب، ويتم إعطاء قيمتين لذلك المتغير ليتخذهما في فترتي السلم والحرب. ويمكن التعبير عن نموذج الاستهلاك أعلاه كالآتي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 D_t + U_t \quad ...(1.11)$$

إذ ان:

$C_t$: تمثل الأنفاق الاستهلاكي الخاص.

$Y_t$: تمثل الدخل.

$D_t$: تمثل المتغير الوهمي وتأخذ القيم:

$D_t = 0$: في وقت السلم.

$D_t = 1$: في وقت الحرب.

$U_t$: تمثل المتغير العشوائي.

فدالة الاستهلاك في وقت السلم تأخذ الصيغة الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t$$

وذلك من خلال التعويض $D_t = 0$ في المعادلة (1.11).

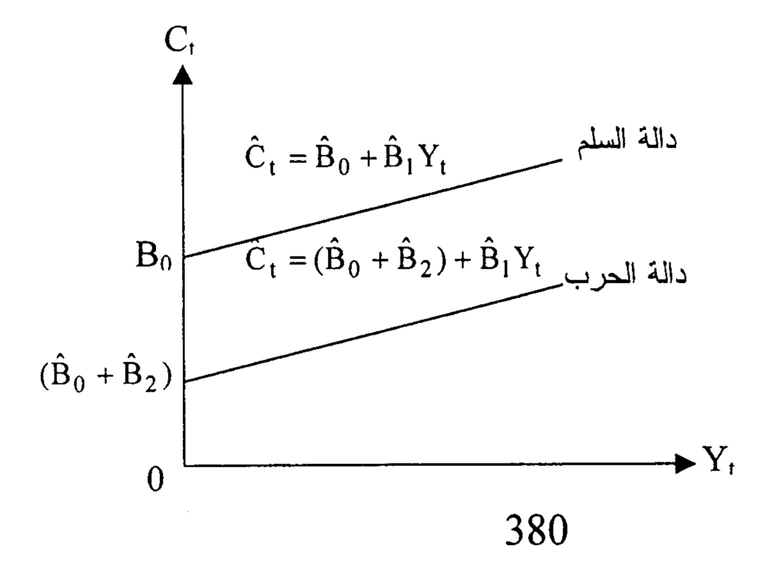
أما في وقت الحرب فان الدالة تأخذ الصيغة الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2(1) + U_t$$
$$C_t = B_0 + B_2 + B_1 Y_t + U_t$$
Or;
$$C_t = (B_0 + B_2) + B_1 Y_t + U_t$$

فخــلال فترة الحرب، يكون الاستهلاك اقل من فترة السلم بسبب القيود ونقص المتاح مــن السلع والخدمات عليه فأن $B_2$ (معامل $D_t$) من المتوقع ان تكون سالبة لسنوات الحرب بحيث يكون المقطع و/أو الميل اقل في معادلة الحرب عنها في معادلة سنوات السلم. ويمكن توضيح هذه الحالات بالأشكال الآتية:

أ- تغير المقطع، ويمكن توضيح ذلك في الشكل *(1.11)*.

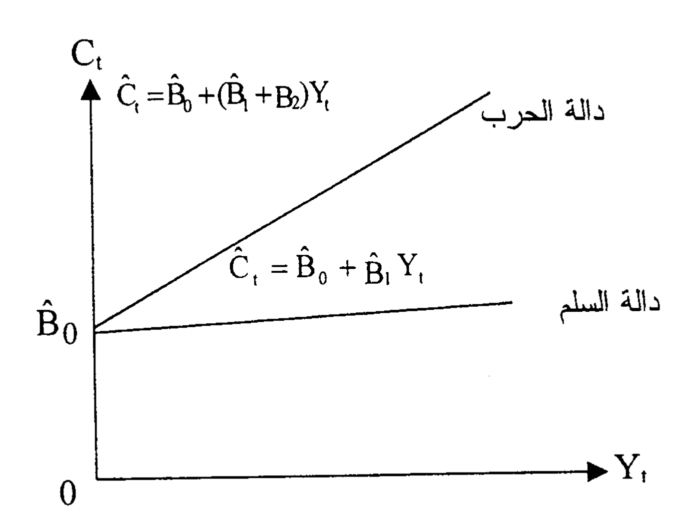
**الشكل (1.11): تغير الحد الثابت في دالة الاستهلاك**



ان الشـــكل (1.11) يوضـــح تغير المقطع فقط حيث يكون المقطع في دالة استهلاك الحرب اسفل من دالة استهلاك السلم.

ب- تغير ميل دالة الاستهلاك، ويمكن توضيح ذلك كما في الشكل (2.11).

**الشـــكل (2.11): تغير ميل دالة الاستهلاك**

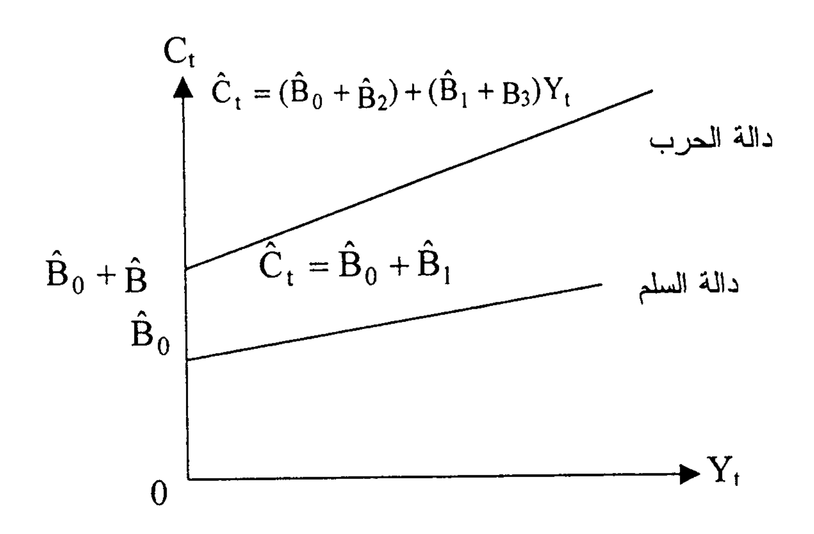



ان الشـــكل (2.11) يوضح تغير الميل حيث ان ميل دالة الاستهلاك ترتفع في فترات السلم عنه في فترات الحرب مع بقاء المقطع ثابت. ان الدالة الأصلية، هي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 Y_t D_t + U_t$$

جـــ- تغـــير المـــيل والحد الثابت لدالة الاستهلاك، ويمكن توضيح ذلك في الشكل (3.11).

**الشكل (3.11): تغير الميل والحد الثابت لدالة الاستهلاك**




ان الشكل (3.11)، يوضح تغير المقطع والميل معاً فالدالة الأصلية، هي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 D_t + B_3 Y_t D_t + U_t$$

هذا ويمكن تعميم الحالة بحيث يشمل نموذج الانحدار الواحد على العديد من المتغيرات الوهمية المستقلة، فمثلاً بافتراض النموذج الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 D_{i1} + B_2 D_{i2} + U_i$$

إذ ان:

$Y_i$: تمثل مستوى دخل الفرد.

$D_1$: تمثل شهادة الدكتوراه.

$D_2$: تمثل شهادة الماجستير.

$B_0$: تمثل المقطع الصادي.

$B_1$: تمثل ميل المتغير الوهمي $D_1$ الذي يفسر أثر شهادة الدكتوراه على متوسط دخل الفرد.

$B_2$: تمثل ميل المتغير الوهمي $D_2$ الذي يفسر أثر شهادة الماجستير على متوسط دخل الفرد.

**مثال 1.11**: بافتراض ان هناك دراسة لتقدير العلاقة بين دخل الفرد، الذي يعتمد على عدد السكان، وسنوات التعليم، توفرت فيها البيانات الآتية في الجدول (1.11).

**جدول (1.11)**: العلاقة بين دخل الفرد وعدد السكان وسنوات التعليم

| ت | دخل الفرد $Y_i$ | عدد السكان $X_{i1}$ | عدد سنوات التعليم $X_{i2}$ | الجنس $D_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1000 | 80 | 9 | 1 |
| 2 | 2000 | 95 | 8 | 1 |
| 3 | 3000 | 100 | 10 | 1 |
| 4 | 4000 | 101 | 10 | 1 |
| 5 | 5000 | 103 | 11 | 1 |
| 6 | 6000 | 115 | 14 | 1 |
| 7 | 7000 | 105 | 15 | 1 |
| 8 | 8000 | 116 | 13 | 0 |
| 9 | 9000 | 120 | 16 | 0 |
| 10 | 10000 | 110 | 17 | 0 |

**المطلـــوب:** معـــرفة أثـــر نوع الجنس على دخل الفرد، بافتراض ان نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد تقديره، هو:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{1i} + B_2 X_{2i} + B_3 D_i + U_i$$

إذ ان: $i = 1, 2, \ldots, n$، وأن:

$D_i$: تمثل الجنس وتكون $D_i = 1$ إذا كان الجنس أنثى و $D_i = 0$ إذا كان الجنس ذكر.

$B_0$: تمثل الحد الثابت.

$B_1$: تمثل أثر التغير في السكان بوحدة واحدة على دخل الفرد.

$B_2$: تمثل أثر التغير في سنوات التعليم بوحدة واحدة على دخل الفرد.

$B_3$: تمثل الحد الثابت التفاضلي ويقيس أثر الجنس على دخل الفرد.

**الحـــل:** نأخذ دالة الدخل المقدرة، عندما يكون الجنس ذكر، وكما في الشكل الآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2 + e_i$$

ويكون شكل دالة الدخل المقدرة، عندما يكون الجنس أنثى وكما يأتي:

$$\hat{Y}_i = (\hat{B}_0 + \hat{B}_3) + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2 + e_i$$

وبتطبيق طريقة OLS على المعادلة المراد تقديرها، نحصل على ما يلي:

$$\hat{Y}_i = -7327.01 + 66.121 X_1 + 567.463 X_2 - 1517.698 D$$

ومن هذه المعادلة التقديرية نستطيع تحديد ما يأتي:

أ- معادلة الدخل المقدرة عندما يكون الجنس ذكر، أي $D_1 = 0$ :

$$\hat{Y}_i = -7327.01 + 66.121X_1 + 567.463X_2$$

ب- معادلة الدخل المقدرة عندما يكون الجنس أنثى ، أي $D_1 = 1$:

$$\hat{Y}_i = [(-7327.01) + (-1517.698)] + 66.121X_1 + 567.463X_2$$

$$\hat{Y}_i = -8844.708 + 66.121X_1 + 567.463X_2$$

نستنتج من ذلك ان الأنثى تحقق دخلاً أقل من دخل الرجل بمقدار 1518 دينار تقريباً.

## 3.11 نموذج الانحدار المتضمن اكثر من متغير وهمي مستقل:

لغـــــرض تقدير وتوضيح معامل الانحدار في حالة تضمين النموذج على متغيرين وهميين مستقلين نأخذ المثال الآتي:

**مثال 2.11**: افترض انه قد توفرت لدينا البيانات الآتية عن دخل الفرد ومستوى التعليم حسب الشهادة وكما في الجدول (2.11).

**جـــدول 2.11: العلاقة بين الدخل ومستوى التعليم (ماجستير، دكتوراه)**

| ت | الدخـــل، $Y_i$ | دكتوراه، $D_{1i}$ | ماجستير، $D_{2i}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1000 | 0 | 0 |
| 2 | 2000 | 0 | 0 |
| 3 | 3000 | 0 | 0 |
| 4 | 4000 | 0 | 1 |
| 5 | 5000 | 0 | 1 |
| 6 | 6000 | 0 | 1 |
| 7 | 7000 | 0 | 0 |
| 8 | 8000 | 1 | 0 |
| 9 | 9000 | 1 | 0 |
| 10 | 10000 | 1 | 0 |

وأن نموذج الانحدار المراد تقديره، يأخذ الصيغة الآتية:

$$Y_i = B_0 + B_1 D_{1i} + B_2 D_{2i} + U_i$$

إذ ان:

$D_1$: تمثل شهادة الدكتوراه وتكون قيمها:

$D_1 = 1$: بالنسبة لشهادة الدكتوراه.

$D_1 = 0$: بالنسبة لشهادة الماجستير والبكالوريوس.

$D_2$: تمثل شهادة الماجستير وتكون قيمها:

$D_2 = 1$: بالنسبة لشهادة الماجستير.

$D_2 = 0$: بالنسبة لشهادة الدكتوراه والبكالوريوس.

$B_0$: تمثل الحد المطلق.

$B_1$: تمثل ميل المتغير الوهمي $D_1$ الذي يقيس اثر شهادة الدكتوراه على متوسط دخل

الفرد.

$B_2$: تمثل ميل المتغير الوهمي $D_2$ الذي يقيس اثر شهادة الماجستير على متوسط دخل الفرد.

$U_i$: تمثل المتغير العشوائي.

ويمكن تقدير النموذج المراد تقديره باستخدام طريقة OLS، ونحصل على:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 D_1 + \hat{B}_2 D_2 + e_i$$

أي ان:

$$\hat{Y}_i = 3666.67 + 5333.33 D_1 + 1333.33 D_2$$

ولتفسير مضامين هذه النتائج، نتبع ما يأتي:

أ- ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة البكالوريوس، عندما $D_1 = D_2 = 0$، هو:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 = 3666.67 \quad \text{دينار}$$

ب- ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة الماجستير، عندما $D_1 = 0$، هو:

$$\hat{Y}_i = (\hat{B}_0 + \hat{B}_2) = 3666.63 + 1333.33$$

$$\hat{Y}_i = 5000 \quad \text{دينار}$$

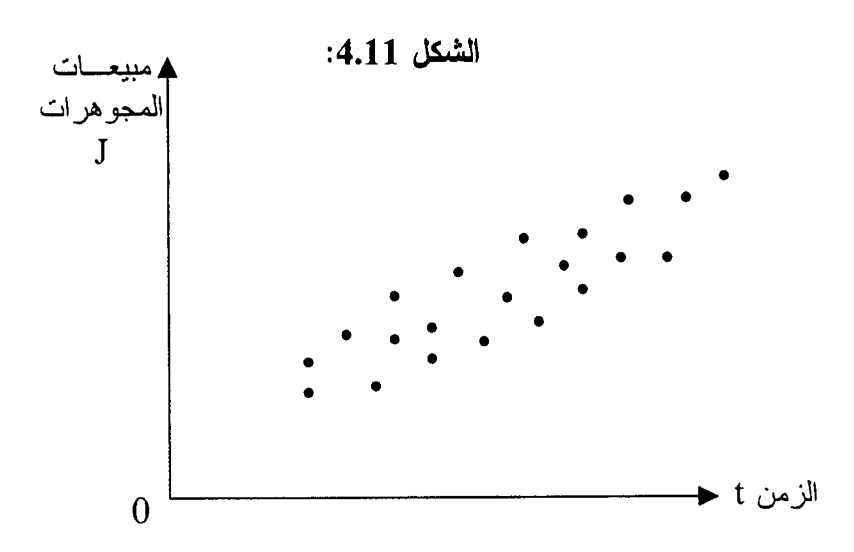
جـ- ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة الدكتوراه عندما $D_2 = 0$، هو:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 = 3666.63 + 1333.33$$

$$\hat{Y}_i = 9000 \quad \text{دينار}$$

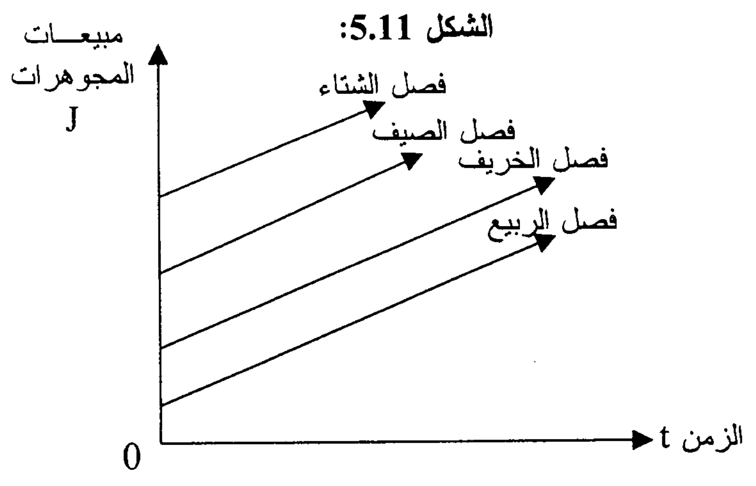
وباستخدام الأسلوب نفسه، يمكن تقدير معاملات الانحدار عندما يكون عدد المتغيرات الوهمية المستقلة اكثر من متغيرين كما هو مبين في الشكل (4.11) بافتراض ان بائع المجوهـــرات يعتمد بشكل كبير على موسم الوقت من السنة، إضافة إلى اتجاه الزمن ولدينا بيانات فصلية لمبيعات المجوهرات.

**الشكل 4.11:**



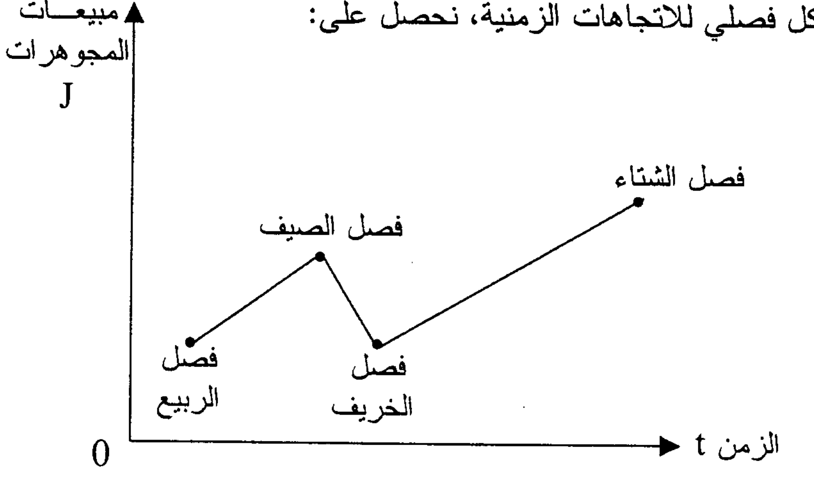

ويمكن رسم العلاقة الانتشارية بيانياً، إذ يلاحظ من الشكل ان هناك اتجاه واضح إلى الأعلى. ولكن عند رسم بيانات سنة معينة تبين ان لها نمط موسمي Seasonal pattern، يمكن توضيحها في الشكل 5.11.

**الشكل 5.11:**




ومن الشكل 5.11 يتبين ان أعلى قيمة للمبيعات هي في فصل الشتاء، إذ أنها تعد فترة

انتعاش المبيعات لطبيعة الفصل وما يتضمنه من مناسبات، كالأعياد مثلاً، وعند رسم ذلك بشكل فصلي للاتجاهات الزمنية، نحصل على:




ولكن قد يتبادر إلى الذهن هنا، هل نستطيع استخدام المتغيرات الوهمية هنا، ولغرض الإجابة على ذلك، لابد من تحديد عدد المتغيرات الوهمية، وهنا ستكون ثلاثة لأن لدينا أربعة مواسم للمبيعات، أي ان 3=1-4، إذ ان واحد من هذه المتغيرات يمثل الأساس و 3 متغيرات متغيرة.

وبافتراض أننا نأخذ فصل الربيع كأساس، ثم نقدم ثلاث متغيرات وهمية هي $D_1$ و $D_2$ و $D_3$، وان القــيم التــي تأخذها هذه المتغيرات تتوقف على الفصل، ويمكن بيان ذلك كما في الجدول الآتي:

**جــدول 3.11: فصول السنة والمتغيرات الوهمية**

| الفصــــل | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
|---|---|---|---|
| الربيـــع | 0 | 0 | 0 |
| الصيــف | 0 | 0 | 1 |
| الخريــف | 0 | 1 | 0 |
| الشـــتاء | 1 | 0 | 0 |

ومن ثم فأن أول خمسة فصول لمبيعات المجوهرات كانت كما في الجدول (4.11).

**جــدول (4.11)**

| وقت الفصل | مبيعات المجوهرات | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 36 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 44 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 45 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 106 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 35 | 0 | 0 | 0 |

وبذلك يمكن استخدام نموذج الانحدار الخطي المتعدد والذي يأخذ الصيغة الآتية:

$$J = B_0 + B_1T + B_2D_1 + B_3D_2 + B_4D_3 + U_i$$

إذ ان:

$D_1$: تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الصيف.

$D_2$: تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الخريف.

$D_3$: تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الشتاء.

## 4.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي تابع:

مـــثلما يكـــون المتغير الوهمي مستقلاً، كذلك يمكن ان يكون المتغير الوهمي تابعاً. والمتغير التابع الوهمي هو متغير ثنائي الوجه يعكس أحد خيارين اثنين كما قد يشير إلى حدوث أو عدم حدوث حدث ما أو إلى وجود أو غياب ظروف معينة، مثال ذلـــك: عامل او عاطل، سفر أو عدم سفر، وتعطى القيمة واحد (1) لوقوع الحدث أو وجـــود الظرف بينما تعطى القيمة صفر (0) لعدم الحدث أو غياب الظرف. وكمثال على ذلك لنأخذ النموذج الآتي:

$$D_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \qquad \ldots (2.11)$$

إذ ان:

$X_i$: تمثل دخل الشخص.

$D_i = 1$: إذا كان الشخص يملك منزلاً.

$D_i = 0$: اذا كان الشخص لا يملك منزلاً.

فالمتغير التابع الوهمي $D_i$ يعتمد على المتغير المستقل $X_i$ والنموذج أعلاه كأي نموذج آخـــر للانحدار، يمكن تقدير معلماته بواسطة طرق المربعات الصغرى العادية ولكن تظهر بعض المشاكل، منها:

**أولاً:** حـــــد الخطأ $U_i$ لا يتبع التوزيع الطبيعي، وهذا يخالف فرض نموذج الانحدار الخطـــي البسيط، OLS، المطلوب لإجراء اختبارات معنوية المعلمات. ويمكن ملاحظة ذلك بإعادة كتابة المعادلة (2.11) كالآتي:

$$U_i = D_i - B_0 - B_1 X_i$$

فإذا كانت $D_i = 0$، فأن:

$$U_i = -B_0 - B_1 X_i$$

أما إذا كانت $D_i = 1$، فأن:

$$U_i = 1 - B_0 - B_1 X_i$$

أي ان $U_i$ تـــتخذ قيمتيـــن ورغم ذلك فأنه يمكن اللجوء إلى نظرية النهاية المركزية للعيـــنات الكبيرة ($n \geq 30$) لغرض الحصول على سند نظري يتيح إجراء اختبارات الفروض في هذه النماذج.

**ثانـــياً:** عنصر الخطأ $U_i$ يرتبط بقيم المتغيرات المستقلة ويؤدي هذا إلى مقدرات غير كفـــوءة أي ان المقـــدرات لا تتصف بكونها تمتلك اصغر تباين، ويمكن التغلب علـــى هذه المشكلة بتصحيح النموذج الأصلي من خلال استخدام تحويلة مناسبة تقلل من حدة المشكلة.

**ثالثاً:** ان القيم المقدرة للمتغير التابع $D_i$ قد تأخذ قيماً خارج المدى من الصفر إلى 1، ويمكن التغلب على هذه المشكلة باستعمال إحدى وسائل التقدير التي تحصر قيم $\hat{D}_i$ داخل المدى من 0 الى 1، منها الدالة الطبيعية التراكمية (نموذج بروبت، Probit)، الدالة اللوجيتية (نموذج لوجت، Logit) وهي أساليب للتقدير تعرض في كتب القياس الاقتصادي الأكثر تقدماً.

**مـــثال 3.11:** بافتراض إننا نرغب في دراسة العلاقة بين الفقر، Poverty، كمتغير تابع $D_1$ والجنس، $D_2$، واللون، $D_3$، كمتغيرات وهمية مستقلة، وان بيانات هذا الـــنموذج مبيـــنة فـــي الجدول (5.11)، وبافتراض ان نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد تقديره، يأخذ الصيغة الآتية:

$$D_{1i} = B_0 + B_1 D_{2i} + B_2 D_{3i} + U_i \qquad \dots (3.11)$$

إذ ان:

$D_1$: تمثل الفقر كمتغير وهمي تابع يأخذ القيمتين:

$D_1 = 1$ الفقر.

$D_1 = 0$ لغير ذلك.

$D_2$: تمثل الجنس كمتغير مستقل ويأخذ القيم الآتية:

$D_2 = 1$ للدلالة على الأنثى.

$D_2 = 0$ للدلالة على الذكر.

$D_3$: تمثل اللون كمتغير مستقل ويأخذ القيم الآتية:

$D_3 = 1$ للدلالة على اللون الأسود.

$D_3 = 0$ للدلالة على اللون الأبيض.

$B_0$: تمثل الحد الثابت.

$B_1$: تمثل أثر الجنس على احتمال حدوث الفقر.

$B_2$: تمثل أثر اللون على احتمال حدوث الفقر.

**جـــــدول 5.11: العلاقـــة بين الفقر، متغير تابع، والجنس واللون، متغيرات وهمية مستقلة.**

| ت | الفقر $D_1$ | الجنس $D_2$ | اللون $D_3$ | ت | الفقر $D_1$ | الجنس $D_2$ | اللون $D_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 17 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 18 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 19 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 20 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 21 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 22 | 0 | 0 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 23 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 1 | 14 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 25 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 26 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 1 | 27 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 28 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 29 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 1 | 0 |

**المطلوب:**

أ- تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة OLS.

ب- بيان أثر كل من الجنس واللون على احتمال حدوث الفقر.

وعند تقدير النموذج من البيانات أعلاه وباستخدام طريقة OLS، كان:

$$\hat{D}_1 = 0.10 + 0.23 D_2 + 0.41 D_3$$

ومن النموذج المقدر أعلاه، يتضح ما يأتي:

أ- احـــتمال حـــدوث الفقر كنتيجة للجنس يكون بمقدار (0.23) واحتمال حدوث الفقر كنتيجة للون سيكون بمقدار (0.41).

ب- ولغـــرض تحديـــد حدوث الفقر لأسباب تتعلق بنوع الجنس واللون، سيكون من خـــلال تعويض قيم المتغيرات المستقلة حسب أنواعها في النموذج المقدر أعلاه، وذلك من خلال ما يأتي:

1- احتمال حدوث الفقر لرب العائلة لكونه ابيض، هو:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 = 0.10$$

لأن $D_2 = D_3 = 0$ ، وأن $D_1 = 1$.

2- احتمال حدوث الفقر للأنثى البيضاء، سيكون:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 = 0.10 + 0.23 = 0.33$$

3- أما احتمال حدوث الفقر للأنثى السوداء، هو:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2$$
$$\hat{D}_1 = 0.10 + 0.23 + 0.41 = 0.47$$

**مـــثال 4.11:** الجـــدول الآتي يمثل كمية الإنتاج لشركةٍ ما، ولمدة 14 شهراً وبأسعار مختلفة حيث ان الشركة واجهت إضراباً لعمالها في بعض مصانعها وذلك خلال الشهر الخامس، والسادس، والسابع.

| المتغير الوهمي D | السعر P | كمية الإنتاج (بآلاف) Q | الشهر |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.79 | 98 | 1 |
| 0 | 0.80 | 100 | 2 |
| 0 | 0.82 | 103 | 3 |
| 0 | 0.82 | 105 | 4 |
| 1 | 0.93 | 80 | 5 |
| 1 | 0.95 | 87 | 6 |
| 1 | 0.96 | 94 | 7 |
| 0 | 0.88 | 113 | 8 |
| 0 | 0.88 | 116 | 9 |
| 0 | 0.90 | 118 | 10 |
| 0 | 0.93 | 121 | 11 |
| 0 | 0.94 | 123 | 12 |
| 0 | 0.96 | 126 | 13 |
| 0 | 0.96 | 128 | 14 |

**المطلوب:**

أ- اختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع خلال فترات الإضراب وعدم الإضراب.

ب- اختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع والميل.

**الحل:**

أ- عند استخدام طريقة OLS تم الحصول على النموذج الآتي:

$$\hat{Q} = -32.47 + 165.47P - 37.64D$$

$$(15.65) \quad (23.59) \qquad R^2 = 0.98$$

فالمقطع خلال فترة عدم الإضراب هو المعامل $\hat{B}_0$، والذي يساوي 32.47− .

أما خلال فترة الإضراب، فهو:

$$= \hat{B}_0 + \hat{B}_2 = -23.47 + (-37.64) = -70.11$$

وهـــذا يعنـــي ان المقطـــع قـــد تحـــرك في فترة الإضراب عما هو خلال فترة عدم الإضراب.

ب- لغـــرض تحديد ما إذا كان هناك تحرك في المقطع والميل، وبعد تقدير النموذج بطريقة OLS، حصلنا على:

$$\hat{Q} = -29.74 + 162.86\,P - 309.62\,D + 287.14\,XD$$
$$(27.16) \quad (5.67) \qquad (4.98) \qquad R^2 = 0.99$$

فالمقطع هو 29.74− ، والميل هو 162.86 خلال فترة عدم الإضراب .

أما في فترة الإضراب، فأن:

المقطع يساوي:

$$\hat{B}_0 + \hat{B}_2 = -29.74 + (-309.62) = -339.36$$

والميل يكون:

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_3 = 162.86 + 287.14 = 450$$

وهـــنا أيضـــاً ان هـــناك اخـــتلافاً في الميل والمقطع لفترة عدم الإضراب عن فترة الإضراب.

## الأســــئلة والتماريـــن

**الســؤال 1.11**: إذا توفــرت البيانات الآتية عن الدخل القومي ومشتريات الدولة من السندات وكما هو في الجدول الآتي:

| i | المشتريات $(B_i)$ | الدخل $(Y_i)$ | $D_i$ |
|---|---|---|---|
| 1983 | 2.6 | 2.4 | 0 |
| 1984 | 3.0 | 2.8 | 0 |
| 1985 | 3.6 | 3.1 | 0 |
| 1986 | 3.7 | 3.4 | 0 |
| 1987 | 3.8 | 3.9 | 0 |
| 1988 | 4.1 | 4.0 | 0 |
| 1989 | 4.4 | 4.2 | 0 |
| 1990 | 7.1 | 5.1 | 1 |
| 1991 | 8.0 | 6.3 | 1 |
| 1992 | 8.9 | 6.3 | 1 |
| 1993 | 9.7 | 8.1 | 1 |
| 1994 | 10.2 | 8.8 | 1 |
| 1995 | 10.1 | 9.6 | 1 |
| 1996 | 7.9 | 9.7 | 0 |
| 1997 | 9.7 | 9.6 | 0 |
| 1998 | 9.1 | 10.4 | 0 |
| 1999 | 10.1 | 12.0 | 0 |

وان نموذج الانحدار قد تم تقديره، يأخذ الصيغة الآتية:

$$B = B_0 + B_1 Y$$

ثم قارن هذا النموذج بالنموذج الآتي:

$$B = B_0 + B_1 Y + D$$

إذ ان:

i: تمثل السنوات.

B: تمثل المشتريات العامة لسندات الدولة.

Y: تمثل الدخل القومي.

D: المتغير الوهمي.

**المطلوب:**

1- أي من النموذجين أعلاه تختار ولماذا؟

2- ما هو أثر الحرب على سلوك الاستثمار، ولماذا؟

السؤال **2.11**: البيانات الآتية تمثل مبيعات إحدى الشركات:

| المدة الزمنية | S | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1997 | 70 | 0 | 0 | 0 |
| | 88 | 0 | 0 | 1 |
| | 90 | 0 | 1 | 0 |
| | 112 | 1 | 0 | 0 |
| 1998 | 76 | 0 | 0 | 0 |
| | 92 | 0 | 0 | 1 |
| | 94 | 0 | 1 | 0 |
| | 224 | 1 | 0 | 0 |
| 1999 | 84 | 0 | 0 | 0 |
| | 98 | 0 | 0 | 1 |
| | 96 | 0 | 1 | 0 |
| | 236 | 1 | 0 | 0 |
| 2000 | 84 | 0 | 0 | 0 |
| | 100 | 0 | 0 | 1 |
| | 102 | 0 | 1 | 0 |
| | 236 | 1 | 0 | 0 |

المطلوب:

1- تقدير معادلة الانحدار الآتية:

$$S = B_0 + B_1 t + B_2 D_1 + B_3 D_2 + B_4 D_3$$

إذ ان: $Y = t$

2- هل ان اتجاه الزمن يتغير معنوياً عند إهمال الفصول؟

3- علق اقتصادياً على النموذج.

**السؤال 3.11**: بافتراض لدينا النموذج الآتي المراد دراسته اقتصادياً:

$$Q = B_0 + B_1P + B_2D + U_i$$

إذ ان $B_2 > 0$ ، وأن:

$D = 1$: تمثل مشتريات اللحوم لسنوات الحرب.

$D = 0$: تمثل مشتريات اللحوم لسنوات السلم.

$Q$ : تمثل الطلب على اللحوم (مليون كيلو) عند الأسعار الثابتة.

$P$: تمثل الرقم القياسي للدخل الحقيقي للمستهلك.

لذلك فأن النموذج في ظل سنوات الحرب، عندما يكون $D = 1$، يكون:

$$Q = (B_0 + B_2) + B_1P + U_i$$

وعند تقدير المعادلة (1)، حصلنا على النتائج الآتية:

$$\hat{Q} = 24 + 0.2\,P - 5D$$

**المطلوب:**

أ- علق اقتصادياً على مشتريات اللحوم أثناء سنوات الحرب والسلم.

ب- مثل النتائج بيانياً موضحاً ميل النموذج.

جـــ- ما هو تفسيرك للمعامل $B_0$.

د- ماذا تعني $(B_0 + B_2)$ اقتصادياً.

**السؤال 4.11:** ما هو المتغير الوهمي، وما هو دوره في تقدير النماذج القياسية؟

**الســؤال 5.11:** ما هي طبيعة المتغيرات الوهمية، وضّح ذلك مع الامثلة والتوضيح البياني.

# المصـــــــادر، *References*

## أولاً: المصـــادر العربيـــــة:


بخيت، حسين علي، وغالب عوض الرفاعي، (2003)، أساسيات الاقتصاد الرياضي، دار المناهج، عمان، الأردن.

بخيت، حسين علي، وغالب عوض الرفاعي، (2006)، تحليل ونمذجة البيانات باستخدام الحاسوب: تطبيق شامل للحزمة SPSS، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

الخميســـي، رفعــت لازم مشعل، 2001، **القياس الاقتصادي المتقدم**، مطبعة جامعة بغداد، العراق.

الراوي، خاشع محمود، 1987، **المدخل إلى تحليل الانحدار**، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، ط1، الموصل، العراق.

ســالفاتور، دومينــيك، 1982، **نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي**، سلســلة ملخصـــات شــوم، دار ماكجروهيل للنشر، ترجمة د. سعدية حافظ منتصر.

السيفو، وليد، وآخرون، (2004)، **الاقتصاد القياسي التحليلي- بين النظرية والتطبيق**، عمان، الأردن.

السيفو، وليد إسماعيل، وآخرون، (2006)، مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي: التنبؤ والاختبارات القياسية من الدرجة الثانية، دار الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

السيفو، وليد إسماعيل، وآخرون، (2006)، أساسيات في الاقتصاد القياسي التحليلي:

نظرية الاقتصاد القياسي والاختبارات القياسية من الدرجة الأولى، دار الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

شريف، عصام عزيز، 1983، **مقدمة في القياس الاقتصادي**، الطبعة الثالثة، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت.

الشيال، سعد الدين، (1982)، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، القاهرة، جمهورية مصر العربية.

عبد الرحمن، عبد المحمود محمد، ، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، جامعة الملك سعود، كلية العلوم الادارية، قسم الاقتصاد.

عطية، عبدالقادر محمد عبدالقادر، (1998)، **الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق**، الدار الجامعية، الاسكندرية، جمهورية مصر العربية.

علي، فاضل احمد وممدوح الدسوقي، وآخرون، (1996)، مقدمة في الاقتصاد القياسي التطبيقي، جامعة قاريونس، ليبيا.

العيسوي، ابراهيم، (1978)، **القياس والتنبؤ في الاقتصاد**، دار النهضة العربية، القاهرة، جمهورية مصر العربية.

فرحان، محمد لطفي، (1998)، **مبادىء الاقتصاد القياسي**، جامعة الفاتح، طرابلس، ليبيا.

القريشي، محمد صالح تركي، (2004)، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

كاظم، أموري هادي، 1988 ، **طرق القياس الاقتصادي**، ط1، بغداد.

محبوب، عادل عبد الغني، 1982، **الاقتصاد القياسي**، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، ط1، بغداد.

## ثانياً: المصـــــادر الإنكليزية:


ASHENFELTER, O.; P.B., LEVINE, and D.J. ZIMMERMAN, (2003), **Statistics and Econometrics: Methods and Applications**, John Wiley & Sons, Inc, U.S.A.

BALTAGI, B.H., (2002), **Econometrics Analysis of Panel Data**, 2end Edition, John Wiley & Sons, LTD, West Sussex, England.

CHOW, G., (1985), **Econometrics**, Mc-Graw-Hill Company, London.

CHOW, G.C., (1983), **Econometrics**, Mac Graw- Hill International Book Company, Tokyo.

DAVIDSON, J., (2000), **Econometrics Theory**, Blackwell Publishers LTD, Oxford, England.

DIELMAN, T.E., (2001), **Applied Regression Analysis for Business and Economics**, 3rd Edition, Thomson Learning Academic Resource center, U.S.A.

DOUGHERTY, C., (2002), **Introduction to Econometrics**, 2end Edition, Oxford University Press, U.K.

DUTTA, M., (1986), **Econometrics Methods**, South-Western Company, New York.

FARRAR, D.E., and R.R. GLAUBER, (1967), "**Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited**" Review of Economics and Statistics.

FAVERO, C.A., (2001), **Applied Macroeconometrics**, Oxford University Press, New York.

GREENE, W.H., (2000), **Econometrics Analysis**, 4th Edition, Prentice- Hall International, New Jersey.

GRIFFITHS, W.E.; R.C. HILL, and G.G. JUDGE, (1993), **Learning and Practicing Econometrics**, John Wiley & Sons, INC, Singapore.

GRIFFITHS, W.E; R.C. HILL, and G.G. DUDGE, (1993), **Learning and Practicing Econometrics**, John Wiley and Sons, New York.

GUJARATI, D.N., (2003), **Student Solutions Manual for use With Basic Econometrics**, 4th Edition, Mc Graw-Hill, New York.

GUJARATT, D.D., (2003), **Basic Econometrics**, Mc Graw-Hill Companies, International Edition, New York.

HEBDEN, J., (1981), **Statistics for Economist**, Philip Allan Publishers Limited, Oxford.

HENDRY, D.F., (2003), Dynamic Econometrics: Advanced Texts

in Econometrics, Oxford University Press, New York.

HSIAO, C., (2003), Analysis of Panel Data, 2end Edition, Cambridge University Press, U.K.

JOHNSTON, J., (1991), **Econometrics Methods**, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Company, Singapore.

KAMENTA, J., (1986), **Elements of Econometrics**, Macmillan, New York.

KOUTSOYIANNIS, A., (1979), "**Theory of Econometrics**" 2nd addition Macmillan, London.

MADDALA, G.S., (1977), "**Econometrics**" McGraw-Hill Book company, New York.

PINDYCH, R.S., and D.L., RUBINFED, (1998), **Econometrics Models and Economic Forecasts**, 4th Edition, McGraw – Hill, New York.

RAMANATHAN, R., (1993), **Statistical Methods in Econometrics**, Academic Press, San Diego.

SALVATORY, D., (1985), **Statistics and Econometrics**, Schaum's Series in Econometrics.

SEDDIGHI, H.R.; K.A. LAWLER, and A.V. KATOS, (2000), **Econometrics: A Practical Approach**, Routledge, London, England.

SENGUPTA, J., (1993), **Econometrics of Information and Efficiency**, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

STOCK, J.H., and M.W. WATSON, (2003), **Introduction to Econometrics**, Addison Wesley, U.S.A.

STUDENMUND, A.H., (2001), **Using Econometrics**, 4th Edition, Addison Wesley Longman, Inc, U.S.A.

THOMAS, R.L., (1993), **Introductory Econometrics: Theory and Applications**, 2nd Edition, Longman, London.

THOMAS, R.L., (1997), **Modern Econometrics: An Introduction**, Longman, London.

VEGA-REDONDO, F., (2003), Economics and the Theory of Games, Cambridge University Press, U.K.

VERBEEK, M., and KU. LEUVEN, (2000) **A Guide to Modern Econometrics**, John Wiley & Sons, LTD, England.

WALTERS, A.A., (1968), **An Introduction to Econometrics**, Macmillan, London.

WONNACOTT, R.J., and T.H. WANNACOTT, (1979), **Econometrics**, John Wiley and Sons Inc., New York.

WOOLDRIDGE, J.M., (2002), **Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data**, The MIT Press, Cambridge,

Massachusetts, London, England.

PATTERSON, K., (2000), **An Introduction to Applied Econometrics a time series approach**, Macmillan, London, U.K.

KOOP, G., (2000), **Analysis of Economic Data**, John Wiley & Sons, LTD., West Sussex, England.

MIRER, T.W., (1995), **Economic Statistics and Econometrics**, 3rd Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.

WANG, P., (2003), **Financial Econometrics: Methods and Models**, Routledge, New York.

# الملاحـــــــــق

# Appendix Tables

**Table 1: Cumulative normal distribution. Table entry is $\Phi(z)$ = Prob [$Z \leq z$].**

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .9700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |

**Table 2: Ordinates of the Standard Normal Density. Table Entry Is $\Phi(z)$.**

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .3989 | .3989 | .3989 | .3988 | .3986 | .3984 | .3982 | .3980 | .3977 | .3973 |
| 0.1 | .3970 | .3965 | .3961 | .3956 | .3951 | .3945 | .3939 | .3932 | .3925 | .3918 |
| 0.2 | .3910 | .3902 | .3894 | .3885 | .3876 | .3867 | .3857 | .3847 | .3836 | .3825 |
| 0.3 | .3814 | .3802 | .3790 | .3778 | .3765 | .3752 | .3739 | .3725 | .3712 | .3697 |
| 0.4 | .3683 | .3668 | .3653 | .3637 | .3621 | .3605 | .3589 | .3572 | .3555 | .3538 |
| 0.5 | .3521 | .3503 | .3485 | .3467 | .3448 | .3429 | .3410 | .3391 | .3372 | .3352 |
| 0.6 | .3332 | .3312 | .3292 | .3271 | .3251 | .3230 | .3209 | .3187 | .3166 | .3144 |
| 0.7 | .3123 | .3101 | .3079 | .3056 | .3034 | .3011 | .2989 | .2966 | .2943 | .2920 |
| 0.8 | .2897 | .2874 | .2850 | .2827 | .2803 | .2780 | .2756 | .2732 | .2709 | .2685 |
| 0.9 | .2661 | .2637 | .2613 | .2589 | .2565 | .2541 | .2516 | .2492 | .2468 | .2444 |
| 1.0 | .2420 | .2396 | .2371 | .2347 | .2323 | .2299 | .2275 | .2251 | .2227 | .2203 |
| 1.1 | .2179 | .2155 | .2131 | .2107 | .2083 | .2059 | .2036 | .2012 | .1989 | .1965 |
| 1.2 | .1942 | .1919 | .1895 | .1872 | .1849 | .1826 | .1804 | .1781 | .1758 | .1736 |
| 1.3 | .1714 | .1691 | .1669 | .1647 | .1626 | .1604 | .1582 | .1561 | .1539 | .1518 |
| 1.4 | .1497 | .1476 | .1456 | .1435 | .1415 | .1394 | .1374 | .1354 | .1334 | .1315 |
| 1.5 | .1295 | .1276 | .1257 | .1238 | .1219 | .1200 | .1182 | .1163 | .1145 | .1127 |
| 1.6 | .1109 | .1092 | .1074 | .1057 | .1040 | .1023 | .1006 | .0989 | .0973 | .0957 |
| 1.7 | .0940 | .0925 | .0909 | .0893 | .0878 | .0863 | .0848 | .0833 | .0818 | .0804 |
| 1.8 | .0790 | .0775 | .0761 | .0748 | .0734 | .0721 | .0707 | .0694 | .0681 | .0669 |
| 1.9 | .0656 | .0644 | .0632 | .0620 | .0608 | .0596 | .0584 | .0573 | .0562 | .0551 |
| 2.0 | .0540 | .0529 | .0519 | .0508 | .0498 | .0488 | .0478 | .0468 | .0459 | .0449 |
| 2.1 | .0440 | .0431 | .0422 | .0413 | .0404 | .0396 | .0387 | .0379 | .0371 | .0363 |
| 2.2 | .0355 | .0347 | .0339 | .0332 | .0325 | .0317 | .0310 | .0303 | .0297 | .0290 |
| 2.3 | .0283 | .0277 | .0270 | .0264 | .0258 | .0252 | .0246 | .0241 | .0235 | .0229 |
| 2.4 | .0224 | .0219 | .0213 | .0208 | .0203 | .0198 | .0194 | .0189 | .0184 | .0180 |
| 2.5 | .0175 | .0171 | .0167 | .0163 | .0158 | .0154 | .0151 | .0147 | .0143 | .0139 |
| 2.6 | .0136 | .0132 | .0129 | .0126 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 | .0107 |
| 2.7 | .0104 | .0101 | .0099 | .0096 | .0093 | .0091 | .0088 | .0086 | .0084 | .0081 |
| 2.8 | .0079 | .0077 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0067 | .0065 | .0063 | .0061 |
| 2.9 | .0060 | .0058 | .0056 | .0055 | .0053 | .0051 | .0050 | .0048 | .0047 | .0046 |
| 3.0 | .0044 | .0043 | .0042 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 | .0035 | .0034 |
| 3.1 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 | .0025 | .0025 |
| 3.2 | .0024 | .0023 | .0022 | .0022 | .0021 | .0020 | .0020 | .0019 | .0018 | .0018 |
| 3.3 | .0017 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 | .0013 | .0013 |
| 3.4 | .0012 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 | .0010 | .0009 | .0009 |

## Table 3: Percentiles of the Student's Distribution.

### Table Entry Is x Such That Prob $[t_n \leq x] = P$ .

| Pn | .750 | .900 | .950 | .975 | .990 | .995 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 |
| 2 | 0.817 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.766 | 1.638 | 2.354 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.777 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.708 |
| 7 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.500 |
| 8 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.897 | 3.355 |
| 9 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.822 | 3.250 |
| 10 | 0.700 | 1.372 | 1.813 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 0.698 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 0.696 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.161 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 0.693 | 1.345 | 1.762 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.132 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 0.691 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.584 | 2.921 |
| 17 | 0.689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 0.688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.879 |
| 19 | 0.688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 0.687 | 1.326 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 0.687 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 0.686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 0.686 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 0.686 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 0.685 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 0.684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 0.684 | 1.314 | 1.704 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 0.683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 0.683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 0.683 | 1.311 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 35 | 0.682 | 1.307 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 |
| 40 | 0.681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.705 |
| 45 | 0.680 | 1.301 | 1.680 | 2.014 | 2.412 | 2.690 |
| 50 | 0.680 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 |
| 60 | 0.679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 70 | 0.679 | 1.294 | 1.667 | 1.994 | 2.381 | 2.648 |
| 80 | 0.679 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 |
| 90 | 0.678 | 1.291 | 1.662 | 1.987 | 2.368 | 2.632 |
| 100 | 0.677 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 |
| $\infty$ | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

**Table 4: Percentiles of the Chi-Squared Distribution. Table Entry Is c Such That Prob $[X_n^2 \leq c] = P$.**

| Pn | .005 | .010 | .025 | .050 | .100 | .250 | .500 | .750 | .900 | .950 | .975 | .990 | .995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00004 | 0.0002 | 0.001 | 0.004 | 0.02 | 0.10 | 0.46 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.89 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 0.58 | 1.39 | 2.27 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | 0.07 | 0.12 | 0.22 | 0.35 | 0.59 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.82 | 9.35 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.49 | 0.71 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | 0.41 | 0.56 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 2.68 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.21 | 3.46 | 5.35 | 7.84 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.35 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.22 | 13.36 | 15.51 | 17.54 | 20.09 | 21.96 |
| 9 | 1.74 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.39 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.55 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.59 | 10.34 | 13.70 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.34 | 14.85 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.34 | 15.98 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.17 | 13.34 | 17.12 | 21.07 | 23.69 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.04 | 14.34 | 18.25 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.91 | 15.34 | 19.37 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.57 | 8.67 | 10.09 | 12.79 | 16.34 | 20.49 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 13.68 | 17.34 | 21.61 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 14.56 | 18.34 | 22.72 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 15.45 | 19.34 | 23.83 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 16.35 | 20.34 | 24.93 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 17.24 | 21.34 | 26.04 | 30.81 | 33.93 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 18.14 | 22.34 | 27.14 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 19.04 | 23.34 | 28.24 | 33.20 | 36.42 | 39.37 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 19.94 | 24.34 | 29.34 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.32 | 46.93 |

**Table 4 ; Continued**

| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 20.84 | 25.34 | 30.44 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 21.75 | 26.34 | 31.53 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.65 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 22.66 | 27.34 | 32.62 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 23.57 | 28.34 | 33.71 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 24.48 | 29.34 | 34.80 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 31 | 13.70 | 15.04 | 17.11 | 19.01 | 21.31 | 25.46 | 30.50 | 36.00 | 41.33 | 44.70 | 47.73 | 51.38 | 53.94 |
| 32 | 14.37 | 15.74 | 17.87 | 19.80 | 22.15 | 26.37 | 31.50 | 37.08 | 42.49 | 45.91 | 48.98 | 52.67 | 55.26 |
| 33 | 15.05 | 16.45 | 18.62 | 20.59 | 22.99 | 27.29 | 32.50 | 38:17 | 43.65 | 47.12 | 50.22 | 53.96 | 56.59 |
| 34 | 15.73 | 17.16 | 19.38 | 21.39 | 23.83 | 28.21 | 33.50 | 39.25 | 44.81 | 48.32 | 51.46 | 55.25 | 57.90 |
| 35 | 16.42 | 17.88 | 20.14 | 22.19 | 24.68 | 29.13 | 34.50 | 40.33 | 45.97 | 49.52 | 52.70 | 56.53 | 59.21 |
| 36 | 17.11 | 18.60 | 20.91 | 22.99 | 25.52 | 30.05 | 35.50 | 41.41 | 47.12 | 50.71 | 53.94 | 57.81 | 60.52 |
| 37 | 17.81 | 19.33 | 21.68 | 23.80 | 26.37 | 30.97 | 36.50 | 42.49 | 48.27 | 51.91 | 55.17 | 59.08 | 61.83 |
| 38 | 18.51 | 20.06 | 22.45 | 24.61 | 27.22 | 31.89 | 37.50 | 43.57 | 49.42 | 53.10 | 56.39 | 60.35 | 63.13 |
| 39 | 19.22 | 20.79 | 23.22 | 25.42 | 28.08 | 32.81 | 38.50 | 44.65 | 50.57 | 54.29 | 57.62 | 61.62 | 64.42 |
| 40 | 19.92 | 21.53 | 24.00 | 26.23 | 28.93 | 33.73 | 39.50 | 45.72 | 51.71 | 55.47 | 58.84 | 62.88 | 65.71 |
| 41 | 20.64 | 22.27 | 24.78 | 27.05 | 29.79 | 34.66 | 40.50 | 46.80 | 52.86 | 56.66 | 60.06 | 64.14 | 67.00 |
| 42 | 21.35 | 23.01 | 25.57 | 27.87 | 30.65 | 35.58 | 41.50 | 47.87 | 54.00 | 57.84 | 61.28 | 65.40 | 68.29 |
| 43 | 22.07 | 23.76 | 26.35 | 28.69 | 31.51 | 36.51 | 42.50 | 48.95 | 55.14 | 59.02 | 62.49 | 66.65 | 69.57 |
| 44 | 22.79 | 24.51 | 27.14 | 29.51 | 32.37 | 37.44 | 43.50 | 50.02 | 56.27 | 60.19 | 63.70 | 67.91 | 70.84 |
| 45 | 23.52 | 25.26 | 27.93 | 30.34 | 33.23 | 38.37 | 44.50 | 51.09 | 57.41 | 61.37 | 64.91 | 69.15 | 72.12 |
| 46 | 24.25 | 26.02 | 28.72 | 31.16 | 34.10 | 39.29 | 45.50 | 52.16 | 58.55 | 62.54 | 66.12 | 70.40 | 73.39 |
| 47 | 24.98 | 26.77 | 29.52 | 31.99 | 34.96 | 40.22 | 46.50 | 53.23 | 59.68 | 63.72 | 67.32 | 71.64 | 74.66 |
| 48 | 25.71 | 27.53 | 30.32 | 32.82 | 35.83 | 41.15 | 47.50 | 54.30 | 60.81 | 64.89 | 68.53 | 72.88 | 75.92 |
| 49 | 26.45 | 28.30 | 31.12 | 33.65 | 36.70 | 42.08 | 48.50 | 55.37 | 61.94 | 66.05 | 69.73 | 74.12 | 77.19 |
| 50 | 27.19 | 29.06 | 31.92 | 34.49 | 37.57 | 43.02 | 49.50 | 56.44 | 63.07 | 67.22 | 70.92 | 75.35 | 78.45 |

**Table 5: 95th Percentile of the F Distribution.**

**Table Entry Is f Such That Prob.** $[F_{n1,n2} \leq f] = .95$

| $n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 |
| 2 | 18.5 | 19.0 | 19.2 | 19.2 | 19.3 | 19.3 | 19.4 | 19.4 | 19.4 |
| 3 | 10.1 | 9.55 | 6.54 | 9.12 | 5.89 | 8.94 | 5.63 | 8.85 | 5.49 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.10 | 3.01 | 2.95 | 2.90 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.72 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.77 | 2.70 | 2.65 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.97 | 2.81 | 2.70 | 2.62 | 2.55 | 2.50 |
| 18 | 4.41 | 3.56 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.52 | 2.45 | 2.39 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.69 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.38 | 2.32 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.41 | 2.34 | 2.28 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.48 | 2.39 | 2.32 | 2.27 |
| 27 | 4.22 | 3.36 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.72 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.94 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.34 | 2.27 | 2.21 |
| 35 | 4.12 | 3.27 | 2.88 | 2.64 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.22 | 2.16 |

**Table 5: Continued**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.13 |
| 45 | 4.06 | 3.21 | 2.81 | 2.58 | 2.42 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 |
| 50 | 4.05 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.26 | 2.17 | 2.10 | 2.04 |
| 70 | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.02 |
| 80 | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.49 | 2.33 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.00 |
| 90 | 3.95 | 3.10 | 2.71 | 2.47 | 2.32 | 2.20 | 2.11 | 2.04 | 1.99 |
| 100 | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.31 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.98 |
| ∞ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 |

## n1 = Degrees of Freedom for the Numerator

| 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 242 | 244 | 246 | 248 | 250 | 251 | 251 | 252 | 254 |
| 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 |
| 8.79 | 8.74 | 5.32 | 8.66 | 8.62 | 8.59 | 8.58 | 8.57 | 5.63 |
| 5.97 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.75 | 5.72 | 5.70 | 5.69 | 5.63 |
| 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.50 | 4.46 | 4.44 | 4.43 | 4.37 |
| 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.88 | 3.81 | 3.78 | 3.75 | 3.74 | 3.67 |
| 3.64 | 3.58 | 3.51 | 3.45 | 3.38 | 3.34 | 3.32 | 3.31 | 3.23 |
| 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.08 | 3.04 | 3.02 | 3.01 | 2.93 |
| 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.86 | 2.83 | 2.80 | 2.79 | 2.71 |
| 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.78 | 2.70 | 2.66 | 2.64 | 2.62 | 2.54 |
| 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.57 | 2.53 | 2.51 | 2.49 | 2.40 |
| 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.47 | 2.43 | 2.40 | 2.39 | 2.30 |
| 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.38 | 2.34 | 2.31 | 2.30 | 2.21 |
| 2.60 | 2.54 | 2.46 | 2.39 | 2.31 | 2.27 | 2.24 | 2.22 | 2.13 |
| 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.16 | 2.07 |
| 2.49 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.11 | 2.01 |
| 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.15 | 2.10 | 2.08 | 2.06 | 1.96 |
| 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.11 | 2.06 | 2.04 | 2.02 | 1.92 |
| 2.38 | 2.31 | 2.24 | 2.16 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.98 | 1.88 |
| 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.13 | 2.04 | 1.99 | 1.97 | 1.95 | 1.84 |
| 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.01 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.81 |
| 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.78 |
| 2.28 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 1.96 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.76 |
| 2.26 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.94 | 1.89 | 1.86 | 1.84 | 1.73 |
| 2.24 | 2.17 | 2.09 | 2.01 | 1.92 | 1.87 | 1.84 | 1.82 | 1.71 |
| 2.22 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.90 | 1.85 | 1.82 | 1.80 | 1.70 |
| 2.21 | 2.13 | 2.06 | 1.97 | 1.89 | 1.84 | 1.81 | 1.79 | 1.68 |
| 2.19 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.87 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.66 |
| 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.65 |

**n1 = Degrees of Freedom for the Numerator: Continued**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.93 | 1.84 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.62 |
| 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.88 | 1.79 | 1.74 | 1.70 | 1.68 | 1.57 |
| 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.69 | 1.66 | 1.64 | 1.51 |
| 2.05 | 1.98 | 1.90 | 1.81 | 1.71 | 1.66 | 1.63 | 1.60 | 1.48 |
| 2.03 | 1.95 | 1.87 | 1.79 | 1.69 | 1.63 | 1.60 | 1.58 | 1.45 |
| 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.65 | 1.60 | 1.56 | 1.54 | 1.39 |
| 1.97 | 1.89 | 1.81 | 1.72 | 1.62 | 1.57 | 1.53 | 1.51 | 1.36 |
| 1.95 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.60 | 1.55 | 1.51 | 1.48 | 1.34 |
| 1.94 | 1.86 | 1.78 | 1.69 | 1.59 | 1.53 | 1.49 | 1.47 | 1.32 |
| 1.93 | 1.85 | 1.77 | 1.68 | 1.57 | 1.52 | 1.48 | 1.45 | 1.30 |
| 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.46 | 1.39 | 1.34 | 1.31 | 1.00 |

**Table 6: 99th Percentiles of the Distribution.**
**Table Entry Is f Such That Prob. [Fn1,n2 < f ]=.99**
**n1 = Degrees of Freedom for the Numerator**

| $n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052 | 5000 | 5403 | 5625 | 5724 | 5859 | 5928 | 5982 | 6023 |
| 2 | 98.5 | 99.0 | 99.2 | 99.3 | 99.3 | 99.3 | 99.4 | 99.4 | 99.4 |
| 3 | 34.1 | 30.8 | 21.3 | 28.7 | 19.0 | 27.9 | 27.7 | 27.5 | 27.3 |
| 4 | 21.2 | 18.0 | 16.7 | 16.0 | 15.5 | 15.2 | 15.0 | 14.8 | 14.7 |
| 5 | 16.3 | 13.3 | 12.1 | 11.4 | 11.0 | 10.6 | 10.5 | 10.3 | 10.2 |
| 6 | 13.7 | 10.9 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 |
| 7 | 12.2 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 |
| 8 | 11.3 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 |
| 9 | 10.6 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 |
| 10 | 10.0 | 7.56 | 6.55 | 6.00 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 |
| 11 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.01 | 3.90 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.68 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 |
| 19 | 8.19 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.57 | 3.46 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.88 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.86 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.79 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 |

**Table 6: Continued**

| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.31 | 3.17 | 3.07 |
| 35 | 7.41 | 5.27 | 4.40 | 3.91 | 3.59 | 3.37 | 3.20 | 3.07 | 2.96 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 |
| 45 | 7.23 | 5.11 | 4.25 | 3.77 | 3.46 | 3.23 | 3.07 | 2.94 | 2.83 |
| 50 | 7.17 | 5.06 | 4.20 | 3.72 | 3.41 | 3.19 | 3.02 | 2.89 | 2.79 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 |
| 70 | 7.01 | 4.92 | 4.07 | 3.60 | 3.29 | 3.07 | 2.91 | 2.78 | 2.67 |
| 80 | 6.96 | 4.88 | 4.04 | 3.56 | 3.26 | 3.04 | 2.87 | 2.74 | 2.64 |
| 90 | 6.93 | 4.85 | 4.01 | 3.54 | 3.23 | 3.01 | 2.85 | 2.72 | 2.61 |
| 100 | 6.90 | 4.82 | 3.98 | 3.51 | 3.21 | 2.99 | 2.82 | 2.70 | 2.59 |
| $\infty$ | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 |

**$n_1$ = Degrees of Freedom for the Numerator**

| 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6056 | 6106 | 6157 | 6209 | 6261 | 6287 | 6302 | 6313 | 6366 |
| 99.4 | 99.4 | 99.4 | 99.5 | 99.5 | 99.5 | 99.5 | 99.5 | 99.5 |
| 27.2 | 27.1 | 26.9 | 26.7 | 26.5 | 26.4 | 26.4 | 26.3 | 26.1 |
| 14.6 | 14.4 | 14.2 | 14.0 | 13.8 | 13.8 | 13.7 | 13.6 | 13.5 |
| 10.1 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.38 | 9.29 | 9.24 | 9.20 | 9.02 |
| 7.88 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.23 | 7.14 | 7.09 | 7.06 | 6.88 |
| 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 5.99 | 5.91 | 5.86 | 5.82 | 5.65 |
| 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.20 | 5.12 | 5.07 | 5.03 | 4.86 |
| 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.65 | 4.57 | 4.52 | 4.48 | 4.31 |
| 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.25 | 4.17 | 4.12 | 4.08 | 3.91 |
| 4.54 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 3.94 | 3.86 | 3.81 | 3.78 | 3.60 |
| 4.30 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.70 | 3.62 | 3.57 | 3.54 | 3.36 |
| 4.10 | 3.96 | 3.82 | 3.67 | 3.51 | 3.43 | 3.38 | 3.34 | 3.17 |
| 3.94 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.35 | 3.27 | 3.22 | 3.18 | 3.00 |
| 3.81 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.22 | 3.13 | 3.08 | 3.05 | 2.87 |
| 3.69 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.10 | 3.02 | 2.97 | 2.93 | 2.75 |
| 3.59 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.00 | 2.92 | 2.87 | 2.84 | 2.65 |
| 3.51 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 2.92 | 2.84 | 2.79 | 2.75 | 2.57 |
| 3.43 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.85 | 2.76 | 2.71 | 2.68 | 2.49 |
| 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.78 | 2.70 | 2.64 | 2.61 | 2.42 |
| 3.31 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.72 | 2.64 | 2.58 | 2.55 | 2.36 |
| 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.67 | 2.58 | 2.53 | 2.50 | 2.31 |
| 3.21 | 3.08 | 2.93 | 2.78 | 2.62 | 2.54 | 2.48 | 2.45 | 2.26 |
| 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.58 | 2.49 | 2.44 | 2.40 | 2.21 |
| 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.54 | 2.45 | 2.40 | 2.36 | 2.17 |

**n1 = Degrees of Freedom for the Numerator: Continued**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.10 | 2.96 | 2.82 | 2.66 | 2.50 | 2.42 | 2.36 | 2.33 | 2.13 |
| 3.06 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.47 | 2.38 | 2.33 | 2.29 | 2.10 |
| 3.03 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.44 | 2.35 | 2.30 | 2.26 | 2.06 |
| 3.01 | 2.87 | 2.73 | 2.58 | 2.41 | 2.33 | 2.27 | 2.24 | 2.03 |
| 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.39 | 2.30 | 2.25 | 2.21 | 2.01 |
| 2.88 | 2.74 | 2.60 | 2.45 | 2.28 | 2.19 | 2.14 | 2.10 | 1.91 |
| 2.80 | 2.67 | 2.52 | 2.37 | 2.20 | 2.12 | 2.06 | 2.02 | 1.81 |
| 2.74 | 2.61 | 2.47 | 2.31 | 2.15 | 2.06 | 2.00 | 1.96 | 1.75 |
| 2.70 | 2.56 | 2.42 | 2.27 | 2.10 | 2.01 | 1.95 | 1.91 | 1.68 |
| 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.03 | 1.94 | 1.88 | 1.84 | 1.60 |
| 2.59 | 2.45 | 2.31 | 2.15 | 1.98 | 1.89 | 1.83 | 1.79 | 1.53 |
| 2.55 | 2.42 | 2.27 | 2.12 | 1.94 | 1.85 | 1.79 | 1.75 | 1.49 |
| 2.53 | 2.39 | 2.25 | 2.09 | 1.92 | 1.82 | 1.76 | 1.72 | 1.48 |
| 2.50 | 2.37 | 2.22 | 2.07 | 1.89 | 1.80 | 1.74 | 1.69 | 1.43 |
| 2.32 | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.70 | 1.57 | 1.51 | 1.46 | 1.00 |

**Table 7a Durbin- Watson Statistic: 1 Percent Significance Points of dL and dU**

| n | K=1 | | k=2 | | k=3 | | k=4 | | k=5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dl | dU |
| 6 | 0.390 | 1.142 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 7 | 0.435 | 1.036 | 0.294 | 1.676 | - | - | - | - | - | - |
| 8 | 0.497 | 1.003 | 0.345 | 1.489 | 0.229 | 2.102 | - | - | - | - |
| 9 | 0.554 | 0.998 | 0.408 | 1.389 | 0.279 | 1.875 | 0.183 | 2.433 | - | - |
| 10 | 0.604 | 1.001 | 0.466 | 1.333 | 0.340 | 1.733 | 0.230 | 2.193 | 0.150 | 2.690 |
| 11 | 0.653 | 1.010 | 0.519 | 1.297 | 0.396 | 1.640 | 0.286 | 2.030 | 0.193 | 2.453 |
| 12 | 0.697 | 1.023 | 0.569 | 1.274 | 0.449 | 1.575 | 0.339 | 1.913 | 0.244 | 2.280 |
| 13 | 0.738 | 1.038 | 0.616 | 1.261 | 0.499 | 1.526 | 0.391 | 1.826 | 0.294 | 2.150 |
| 14 | 0.776 | 1.054 | 0.660 | 1.254 | 0.547 | 1.490 | 0.441 | 1.757 | 0.343 | 2.049 |
| 15 | 0.811 | 1.070 | 0.700 | 1.252 | 0.591 | 1.464 | 0.488 | 1.704 | 0.391 | 1.967 |
| 16 | 0.844 | 1.086 | 0.737 | 1.252 | 0.633 | 1.446 | 0.532 | 1.663 | 0.437 | 1.900 |
| 17 | 0.874 | 1.102 | 0.772 | 1.255 | 0.672 | 1.432 | 0.574 | 1.630 | 0.480 | 1.847 |
| 18 | 0.902 | 1.118 | 0.805 | 1.259 | 0.708 | 1.422 | 0.613 | 1.604 | 0.522 | 1.803 |
| 19 | 0.928 | 1.132 | 0.835 | 1.265 | 0.742 | 1.415 | 0.650 | 1.584 | 0.561 | 1.767 |
| 20 | 0.952 | 1.147 | 0.863 | 1.271 | 0.773 | 1.411 | 0.685 | 1.567 | 0.598 | 1.737 |
| 21 | 0.975 | 1.161 | 0.890 | 1.277 | 0.803 | 1.408 | 0.718 | 1.554 | 0.633 | 1.712 |
| 22 | 0.997 | 1.174 | 0.914 | 1.284 | 0.831 | 1.407 | 0.748 | 1.543 | 0.667 | 1.691 |
| 23 | 1.018 | 1.187 | 0.938 | 1.291 | 0.858 | 1.407 | 0.777 | 1.534 | 0.698 | 1.673 |
| 24 | 1.037 | 1.199 | 0.960 | 1.298 | 0.882 | 1.407 | 0.805 | 1.528 | 0.728 | 1.658 |
| 25 | 1.055 | 1.211 | 0.981 | 1.305 | 0.906 | 1.409 | 0.831 | 1.523 | 0.756 | 1.645 |
| 26 | 1.072 | 1.222 | 1.001 | 1.312 | 0.928 | 1.411 | 0.855 | 1.518 | 0.783 | 1.635 |
| 27 | 1.089 | 1.233 | 1.019 | 1.319 | 0.949 | 1.413 | 0.878 | 1.515 | 0.808 | 1.626 |
| 28 | 1.104 | 1.244 | 1.037 | 1.325 | 0.969 | 1.415 | 0.900 | 1.513 | 0.832 | 1.618 |
| 29 | 1.119 | 1.254 | 1.054 | 1.332 | 0.988 | 1.418 | 0.921 | 1.512 | 0.855 | 1.611 |
| 30 | 1.133 | 1.263 | 1.070 | 1.339 | 1.006 | 1.421 | 0.941 | 1.511 | 0.877 | 1.606 |
| 31 | 1.147 | 1.273 | 1.085 | 1.345 | 1.023 | 1,425 | 0.960 | 1.510 | 0.897 | 1.601 |
| 32 | 1.160 | 1.282 | 1.100 | 1.352 | 1.040 | 1.428 | 0.979 | 1.510 | 0.917 | 1.597 |
| 33 | 1.172 | 1.291 | 1.114 | 1.358 | 1.055 | 1.432 | 0.996 | 1.510 | 0.936 | 1.594 |
| 34 | 1.184 | 1.299 | 1.128 | 1.364 | 1.070 | 1.435 | 1.012 | 1.511 | 0.954 | 1.591 |
| 35 | 1.195 | 1.307 | 1.140 | 1.370 | 1.085 | 1.439 | 1.028 | 1.512 | 0.971 | 1.589 |
| 36 | 1.206 | 1.315 | 1.153 | 1.376 | 1.098 | 1.442 | 1.043 | 1.513 | 0.988 | 1.588 |
| 37 | 1.217 | 1.323 | 1.165 | 1.382 | 1.112 | 1.446 | 1.058 | 1.514 | 1.004 | 1.586 |
| 38 | 1.227 | 1.330 | 1.176 | 1.388 | 1.124 | 1.449 | 1.072 | 1.515 | 1.019 | 1.585 |
| 39 | 1.237 | 1.337 | 1.187 | 1.393 | 1.137 | 1.453 | 1.085 | 1.517 | 1.034 | 1.584 |

**Table 7a: Continued**

| 40 | 1.246 | 1.344 | 1.198 | 1.398 | 1.148 | 1.457 | 1.098 | 1.518 | 1.048 | 1.584 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 1.288 | 1.376 | 1.245 | 1.423 | 1.201 | 1.474 | 1.156 | 1.528 | 1.111 | 1.584 |
| 50 | 1.324 | 1.403 | 1.285 | 1.446 | 1.245 | 1.491 | 1.205 | 1.538 | 1.164 | 1.587 |
| 55 | 1.356 | 1.427 | 1.320 | 1.466 | 1.284 | 1.506 | 1.247 | 1.548 | 1.209 | 1.592 |
| 60 | 1.383 | 1.449 | 1.350 | 1.484 | 1.317 | 1.520 | 1.283 | 1.558 | 1.249 | 1.598 |
| 65 | 1.407 | 1.468 | 1.377 | 1.500 | 1.346 | 1.534 | 1.315 | 1.568 | 1.283 | 1.604 |
| 70 | 1.429 | 1.485 | 1.400 | 1.515 | 1.372 | 1.546 | 1.343 | 1.578 | 1.313 | 1.611 |
| 75 | 1.448 | 1.501 | 1.422 | 1.529 | 1.395 | 1.557 | 1.368 | 1.587 | 1.340 | 1.617 |
| 80 | 1.466 | 1.515 | 1.441 | 1.541 | 1.416 | 1.568 | 1.390 | 1.595 | 1.364 | 1.624 |
| 85 | 1.482 | 1.528 | 1.458 | 1.553 | 1.435 | 1.578 | 1.411 | 1.603 | 1.386 | 1.630 |
| 90 | 1.496 | 1.540 | 1.474 | 1.563 | 1.452 | 1.587 | 1.429 | 1.611 | 1.406 | 1.636 |
| 95 | 1.510 | 1.552 | 1.489 | 1.575 | 1.468 | 1.596 | 1.446 | 1.618 | 1.425 | 1.642 |
| 100 | 1.522 | 1.562 | 1.503 | 1.583 | 1.482 | 1.604 | 1.462 | 1.625 | 1.441 | 1.647 |
| 150 | 1.611 | 1.637 | 1.598 | 1.651 | 1.584 | 1.665 | 1.571 | 1.679 | 1.557 | 1.693 |
| 200 | 1.664 | 1.684 | 1.653 | 1.693 | 1.643 | 1.704 | 1.633 | 1.715 | 1.623 | 1.725 |

**Table 7a – Continued**

| k=6 | | k=7 | | k=8 | | k=9 | | k=10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dL | dU | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dl | dU |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.124 | 2.892 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.164 | 2.665 | 0.105 | 3.053 | - | - | - | - | - | - |
| 0.211 | 2.490 | 0.140 | 2.838 | 0.090 | 3.182 | - | - | - | - |
| 0.257 | 2.354 | 0.183 | 2.667 | 0.122 | 2.981 | 0.078 | 3.278 | - | - |
| 0.303 | 2.244 | 0.226 | 2.530 | 0.161 | 2.817 | 0.107 | 3.101 | 0.068 | 3.374 |
| 0.349 | 2.153 | 0.269 | 2.416 | 0.200 | 2.681 | 0.142 | 2.944 | 0.094 | 3.201 |
| 0.393 | 2.078 | 0.313 | 2.319 | 0.241 | 2.566 | 0.179 | 2.811 | 0.127 | 3.053 |
| 0.435 | 2.015 | 0.355 | 2.238 | 0.282 | 2.467 | 0.126 | 2.697 | 0.160 | 2.925 |
| 0.476 | 1.963 | 0.396 | 2.169 | 0.322 | 2.381 | 0.255 | 2.597 | 0.196 | 2.813 |
| 0.515 | 1.918 | 0.436 | 2.110 | 0.362 | 2.308 | 0.294 | 2.510 | 0.232 | 2.714 |
| 0.552 | 1.881 | 0.474 | 2.059 | 0.400 | 2.244 | 0.331 | 2.468 | 0.268 | 2.625 |
| 0.587 | 1.849 | 0.510 | 2.015 | 0.437 | 2.188 | 0.368 | 2.367 | 0.304 | 2.548 |
| 0.620 | 1.821 | 0.545 | 1.977 | 0.437 | 2.140 | 0.404 | 2.308 | 0.340 | 2.479 |
| 0.652 | 1.797 | 0.578 | 1.944 | 0.507 | 2.097 | 2.439 | 2.255 | 0.375 | 2.417 |
| 0.682 | 1.766 | 0.610 | 1.915 | 0.540 | 2.059 | 0.473 | 2.209 | 0.409 | 2.362 |
| 0.711 | 1.759 | 0.640 | 1.889 | 0.572 | 2.026 | 0.505 | 2.168 | 0.441 | 2.313 |
| 0.738 | 1.743 | 0.669 | 1.867 | 0.602 | 1.997 | 0.536 | 2.131 | 0.473 | 2.269 |
| 0.764 | 1.729 | 0.696 | 1.847 | 0.630 | 1.970 | 0.566 | 2.098 | 0.504 | 2.229 |
| 0.788 | 1.718 | 0.723 | 1.830 | 0.658 | 1.947 | 0.595 | 2.068 | 0.533 | 2.193 |
| 0.812 | 1.707 | 0.748 | 1.814 | 0.684 | 1.925 | 0.622 | 2.041 | 0.562 | 2.160 |
| 0.834 | 1.698 | 0.772 | 1.800 | 0.710 | 1.906 | 0.649 | 2.017 | 0.589 | 2.131 |
| 0.856 | 1.690 | 0.794 | 1.788 | 0.734 | 1.889 | 0.674 | 1.995 | 0.615 | 2.104 |
| 0.876 | 1.683 | 0.816 | 1.776 | 0.757 | 1.874 | 0.698 | 1.975 | 0.641 | 2.080 |
| 0.896 | 1.677 | 0.837 | 1.766 | 0.779 | 1.860 | 0.722 | 1.957 | 0.665 | 2.057 |
| 0.914 | 1.671 | 0.857 | 1.757 | 0.800 | 1.847 | 0.744 | 1.940 | 0.689 | 2.037 |
| 0.932 | 1.666 | 0.877 | 1.749 | 0.821 | 1.836 | 0.766 | 1.925 | 0.711 | 2.018 |
| 0.950 | 1.662 | 0.895 | 1.742 | 0.841 | 1.825 | 0.787 | 1.911 | 0.733 | 2.001 |
| 0.966 | 1.658 | 0.913 | 1.735 | 0.860 | 1.816 | 0.807 | 1.899 | 0.754 | 1.985 |
| 0.982 | 1.655 | 0.930 | 1.729 | 0.878 | 1.807 | 0.826 | 1.887 | 0.774 | 1.970 |
| 0.997 | 1.652 | 0.946 | 1.724 | 0.895 | 1.799 | 0.844 | 1.876 | 0.789 | 1.956 |
| 1.065 | 1.643 | 1.019 | 1.704 | 0.974 | 1.768 | 0.927 | 1.834 | 0.881 | 1.902 |
| 1.123 | 1.639 | 1.081 | 1.692 | 1.039 | 1.748 | 0.997 | 1.805 | 0.955 | 1.864 |

**Table 7a: Continued**

| 1.172 | 1.638 | 1.134 | 1.685 | 1.095 | 1.734 | 1.057 | 1.785 | 1.018 | 1.837 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.214 | 1.639 | 1.179 | 1.682 | 1.144 | 1.726 | 1.108 | 1.771 | 1.072 | 1.817 |
| 1.251 | 1.642 | 1.218 | 1.680 | 1.186 | 1.720 | 1.153 | 1.761 | 1.120 | 1.802 |
| 1.283 | 1.645 | 1.253 | 1.680 | 1.223 | 1.716 | 1.192 | 1.754 | 1.162 | 1.792 |
| 1.283 | 1.645 | 1.253 | 1.680 | 1.223 | 1.716 | 1.192 | 1.754 | 1.162 | 1.792 |
| 1.313 | 1.646 | 1.284 | 1.682 | 1.256 | 1.716 | 1.227 | 1.746 | 1.199 | 1.785 |
| 1.338 | 1.653 | 1.312 | 1.683 | 1.285 | 1.714 | 1.259 | 1.745 | 1.232 | 1.777 |
| 1.362 | 1.657 | 1.337 | 1.685 | 1.312 | 1.714 | 1.287 | 1.743 | 1.262 | 1.773 |
| 1.383 | 1.661 | 1.360 | 1.687 | 1.336 | 1.714 | 1.312 | 1.741 | 1.288 | 1.769 |
| 1.403 | 1.666 | 1.381 | 1.690 | 1.358 | 1.715 | 1.336 | 1.741 | 1.313 | 1.767 |
| 1.421 | 1.670 | 1.400 | 1.693 | 1.378 | 1.717 | 1.357 | 1.741 | 1.335 | 1.765 |
| 1.543 | 1.708 | 1.530 | 1.722 | 1.515 | 1.737 | 1.501 | 1.752 | 1.468 | 1.767 |
| 1.613 | 1.735 | 1.603 | 1.746 | 1.592 | 1.575 | 1.582 | 1.768 | 1.571 | 1.779 |

**Table 7a – Continued**

| n | k=11 | | k=12 | | k=13 | | k=14 | | k=15 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dl | dU |
| 16 | 0.060 | 3.446 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 17 | 0.084 | 3.286 | 0.053 | 3.506 | - | - | - | - | - | - |
| 18 | 0.113 | 3.146 | 0.075 | 3.358 | 0.047 | 3.557 | - | - | - | - |
| 19 | 0.145 | 3.023 | 0.102 | 3.227 | 0.067 | 3.420 | 0.043 | 3.601 | - | - |
| 20 | 0.178 | 2.914 | 0.131 | 3.109 | 0.092 | 3.297 | 0.061 | 3.474 | 0.038 | 3.639 |
| 21 | 0.212 | 2.817 | 0.162 | 3.004 | 0.119 | 3.185 | 0.084 | 3.358 | 0.055 | 3.521 |
| 22 | 0.246 | 2.729 | 0.194 | 2.909 | 0.148 | 3.084 | 0.109 | 3.252 | 0.077 | 3.412 |
| 23 | 0.281 | 2.651 | 0.227 | 2.822 | 0.178 | 2.991 | 0.136 | 3.155 | 0.100 | 3.311 |
| 24 | 0.315 | 2.580 | 0.260 | 2.744 | 0.209 | 2.906 | 0.165 | 3.065 | 0.125 | 3.218 |
| 25 | 0.348 | 2.517 | 0.292 | 2.674 | 0.240 | 2.829 | 0.194 | 2.982 | 0.152 | 3.131 |
| 26 | 0.381 | 2.460 | 0.324 | 2.610 | 0.272 | 2.758 | 0.224 | 2.906 | 0.180 | 3.050 |
| 27 | 0.413 | 2.409 | 0.356 | 2.552 | 0.303 | 2.964 | 0.253 | 2.836 | 0.208 | 2.976 |
| 28 | 0.444 | 2.363 | 0.387 | 2.499 | 0.333 | 2.635 | 0.283 | 2.772 | 0.237 | 2.907 |
| 29 | 0.474 | 2.321 | 0.417 | 2.451 | 0.363 | 2.582 | 0.313 | 2.713 | 0.266 | 2.843 |
| 30 | 0.503 | 2.283 | 0.447 | 2.407 | 0.393 | 2.533 | 0.342 | 2.659 | 0.294 | 2.785 |
| 31 | 0.531 | 2.248 | 0.475 | 2.367 | 0.422 | 2.487 | 0.371 | 2.609 | 0.322 | 2.730 |
| 32 | 0.558 | 2.216 | 0.503 | 2.330 | 0.450 | 2.446 | 0.399 | 2.563 | 0.350 | 2.680 |
| 33 | 0.585 | 2.187 | 0.530 | 2.296 | 0.477 | 2.408 | 0.426 | 2.520 | 0.377 | 2.633 |
| 34 | 0.610 | 2.160 | 0.556 | 2.266 | 0.503 | 2.373 | 0.452 | 2.481 | 0.404 | 2.590 |
| 35 | 0.634 | 2.136 | 0.581 | 2.237 | 0.529 | 2.340 | 0.478 | 2.444 | 0.430 | 2.550 |
| 36 | 0.658 | 2.113 | 0.605 | 2.210 | 0.554 | 2.310 | 0.504 | 2.410 | 0.455 | 2.512 |
| 37 | 0.680 | 2.092 | 0.628 | 2.186 | 0.578 | 2.282 | 0.528 | 2.379 | 0.480 | 2.477 |
| 38 | 0.702 | 2.073 | 0.651 | 2.164 | 0.601 | 2.256 | 0.552 | 2.350 | 0.504 | 2.445 |
| 39 | 0.723 | 2.055 | 0.673 | 2.143 | 0.623 | 2.232 | 0.575 | 2.323 | 0.528 | 2.414 |
| 40 | 0.744 | 2.039 | 0.694 | 2.123 | 0.645 | 2.210 | 0.597 | 2.297 | 0.551 | 2.386 |
| 45 | 0.835 | 1.972 | 0.790 | 2.044 | 0.744 | 2.118 | 0.700 | 2.193 | 0.655 | 2.269 |
| 50 | 0.913 | 1.925 | 0.871 | 1.987 | 0.829 | 2.051 | 0.787 | 2.116 | 0.746 | 2.182 |
| 55 | 0.979 | 1.891 | 0.940 | 1.945 | 0.902 | 2.002 | 0.863 | 2.059 | 0.825 | 2.117 |
| 60 | 1.037 | 1.865 | 1.001 | 1.914 | 0.965 | 1.964 | 0.929 | 2.015 | 0.893 | 2.067 |
| 65 | 1.087 | 1.845 | 1.053 | 1.889 | 1.020 | 1.934 | 0.986 | 1.980 | 0.953 | 2.027 |

Table 7a – Continued

| 70 | 1.131 | 1.831 | 1.099 | 1.870 | 1.068 | 1.911 | 1.037 | 1.953 | 1.005 | 1.995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 1.170 | 1.819 | 1.141 | 1.856 | 1.111 | 1.893 | 1.082 | 1.931 | 1.052 | 1.970 |
| 80 | 1.205 | 1.810 | 1.777 | 1.844 | 1.150 | 1.878 | 1.122 | 1.913 | 1.094 | 1.949 |
| 85 | 1.236 | 1.803 | 1.210 | 1.834 | 1.184 | 1.866 | 1.158 | 1.898 | 1.132 | 1.931 |
| 90 | 1.264 | 1.798 | 1.240 | 1.827 | 1.215 | 1.856 | 1.191 | 1.886 | 1.166 | 1.917 |
| 95 | 1.290 | 1.793 | 1.267 | 1.821 | 1.244 | 1.848 | 1.221 | 1.876 | 1.197 | 1.905 |
| 100 | 1.314 | 1.790 | 1.292 | 1.816 | 1.270 | 1.841 | 1.248 | 1.868 | 1.225 | 1.895 |
| 150 | 1.473 | 1.783 | 1.458 | 1.799 | 1.444 | 1.814 | 1.429 | 1.830 | 1.414 | 1.847 |
| 200 | 1.561 | 1.791 | 1.550 | 1.801 | 1.539 | 1.813 | 1.528 | 1.824 | 1.518 | 1.836 |

**Table 7a – Continued**

| k=16 | | k=17 | | k=18 | | k=19 | | k=20 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dL | dU | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dl | dU |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.035 | 3.671 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.050 | 3.562 | 0.032 | 3.700 | - | - | - | - | - | - |
| 0.070 | 3.459 | 0.046 | 3.597 | 0.029 | 3.725 | - | - | - | - |
| 0.092 | 3.363 | 0.065 | 3.501 | 0.043 | 3.629 | 0.027 | 3.747 | - | - |
| 0.116 | 3.274 | 0.085 | 3.410 | 0.060 | 3.538 | 0.039 | 3.657 | 0.025 | 3.766 |
| 0.141 | 3.191 | 0.107 | 3.325 | 0.079 | 3.452 | 0.055 | 3.572 | 0.036 | 3.682 |
| 0.167 | 3.113 | 0.131 | 3.245 | 0.100 | 3.371 | 0.073 | 3.490 | 0.051 | 3.602 |
| 0.194 | 3.040 | 0.156 | 3.169 | 0.122 | 3.294 | 0.093 | 3.412 | 0.068 | 3.524 |
| 0.222 | 2.972 | 0.182 | 3.098 | 0.146 | 3.220 | 0.114 | 3.338 | 0.087 | 3.450 |
| 0.249 | 2.909 | 0.208 | 3.032 | 0.171 | 3.152 | 0.137 | 3.267 | 0.107 | 3.379 |
| 0.277 | 2.851 | 0.234 | 2.970 | 0.196 | 3.087 | 0.160 | 3.201 | 0.128 | 3.311 |
| 0.304 | 2.797 | 0.261 | 2.912 | 0.221 | 3.026 | 0.184 | 3.137 | 0.151 | 3.246 |
| 0.331 | 2.746 | 0.287 | 2.858 | 0.246 | 2.969 | 0.209 | 3.078 | 0.174 | 3.184 |
| 0.357 | 2.699 | 0.313 | 2.808 | 0.272 | 2.915 | 0.233 | 3.022 | 0.197 | 3.126 |
| 0.383 | 2.655 | 0.339 | 2.761 | 0.297 | 2.865 | 0.257 | 2.969 | 0.221 | 3.071 |
| 0.409 | 2.614 | 0.364 | 2.717 | 0.322 | 2.818 | 0.282 | 2.919 | 0.244 | 3.019 |
| 0.434 | 2.576 | 0.389 | 2.675 | 0.347 | 2.774 | 0.306 | 2.872 | 0.268 | 2.969 |
| 0.458 | 2.540 | 0.414 | 2.637 | 0.371 | 2.733 | 0.330 | 2.828 | 0.291 | 2.923 |
| 0.482 | 2.507 | 0.438 | 2.600 | 0.395 | 2.694 | 0.354 | 2.787 | 0.315 | 2.879 |
| 0.505 | 2.476 | 0.461 | 2.566 | 0.418 | 2.657 | 0.377 | 2.748 | 0.338 | 2.838 |
| 0.612 | 2.346 | 0.570 | 2.424 | 0.528 | 2.503 | 0.488 | 2.582 | 0.448 | 2.661 |
| 0.705 | 2.250 | 0.665 | 2.318 | 0.625 | 2.387 | 0.586 | 2.456 | 0.548 | 2.526 |
| 0.786 | 2.176 | 0.748 | 2.237 | 0.711 | 2.298 | 0.674 | 2.359 | 0.637 | 2.421 |
| 0.857 | 2.120 | 0.822 | 2.173 | 0.786 | 2.227 | 0.751 | 2.283 | 0.716 | 2.338 |
| 0.919 | 2.075 | 0.886 | 2.123 | 0.852 | 2.172 | 0.819 | 2.221 | 0.786 | 2.272 |

**Table 7a: Continued**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.974 | 2.038 | 0.943 | 2.082 | 0.911 | 2.127 | 0.880 | 2.172 | 0.849 | 2.217 |
| 1.023 | 2.009 | 0.993 | 2.049 | 0.964 | 2.090 | 0.934 | 2.131 | 0.905 | 2.172 |
| 1.066 | 1.984 | 1.039 | 2.022 | 1.011 | 2.057 | 0.983 | 2.097 | 0.955 | 2.135 |
| 1.106 | 1.965 | 1.080 | 1.999 | 1.053 | 2.033 | 1.027 | 2.068 | 1.000 | 2.104 |
| 1.141 | 1.948 | 1.116 | 1.979 | 1.091 | 2.012 | 1.066 | 2.044 | 1.041 | 2.077 |
| 1.174 | 1.934 | 1.150 | 1.963 | 1.126 | 1.993 | 1.102 | 2.023 | 1.079 | 2.054 |
| 1.203 | 1.922 | 1.181 | 1.949 | 1.158 | 1.977 | 1.136 | 2.006 | 1.113 | 2.034 |
| 1.400 | 1.863 | 1.385 | 1.880 | 1.370 | 1.897 | 1.355 | 1.913 | 1.340 | 1.931 |
| 1.507 | 1.847 | 1.495 | 1.860 | 1.484 | 1.871 | 1.474 | 1.883 | 1.462 | 1.896 |

**Table 7b – Durbin-Watson Statistic:**

**5 Percent Significance Points of dL and dU**

| n | k=1 | | k=2 | | k=3 | | k=4 | | k=5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dl | dU |
| 6 | 0.610 | 1.400 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 7 | 0.700 | 1.356 | 0.467 | 1.896 | - | - | - | - | - | - |
| 8 | 0.763 | 1.332 | 0.559 | 1.777 | 0.368 | 2.287 | - | - | - | - |
| 9 | 0.824 | 1.320 | 0.629 | 1.699 | 0.455 | 2.128 | 0.296 | 2.588 | - | - |
| 10 | 0.879 | 1.320 | 0.697 | 1.641 | 0.525 | 2.016 | 0.376 | 2.414 | 0.243 | 2.822 |
| 11 | 0.927 | 1.324 | 0.758 | 1.604 | 0.595 | 1.928 | 0.444 | 2.283 | 0.316 | 2.645 |
| 12 | 0.971 | 1.331 | 0.812 | 1.579 | 0.658 | 1.864 | 0.512 | 2.177 | 0.379 | 2.506 |
| 13 | 1.010 | 1.340 | 0.861 | 1.562 | 0.715 | 1.816 | 0.574 | 2.094 | 0.445 | 2.390 |
| 14 | 1.045 | 1.350 | 0.905 | 1.551 | 0.767 | 1.779 | 0.632 | 2.030 | 0.505 | 2.296 |
| 15 | 1.077 | 1.361 | 0.946 | 1.543 | 0.814 | 1.750 | 0.685 | 1.977 | 0.562 | 2.220 |
| 16 | 1.106 | 1.371 | 0.982 | 1.539 | 0.857 | 1.728 | 0.734 | 1.935 | 0.615 | 2.157 |
| 17 | 1.133 | 1.381 | 1.015 | 1.536 | 0.897 | 1.710 | 0.779 | 1.900 | 0.664 | 2.104 |
| 18 | 1.158 | 1.391 | 1.046 | 1.535 | 0.933 | 1.696 | 0.820 | 1.872 | 0.710 | 2.060 |
| 19 | 1.180 | 1.401 | 1.074 | 1.536 | 0.967 | 1.685 | 0.859 | 1.848 | 0.752 | 2.023 |
| 20 | 1.201 | 1.411 | 1.100 | 1.537 | 0.998 | 1.676 | 0.894 | 1.828 | 0.792 | 1.991 |
| 21 | 1.221 | 1.420 | 1.125 | 1.538 | 1.026 | 1.669 | 0.927 | 1.812 | 0.829 | 1.964 |
| 22 | 1.239 | 1.429 | 1.147 | 1.541 | 1.053 | 1.664 | 0.958 | 1.797 | 0.863 | 1.940 |
| 23 | 1.257 | 1.437 | 1.168 | 1.543 | 1.078 | 1.660 | 0.986 | 1.785 | 0.895 | 1.920 |
| 24 | 1.273 | 1.446 | 1.188 | 1.546 | 1.101 | 1.656 | 1.013 | 1.775 | 0.925 | 1.902 |
| 25 | 1.288 | 1.454 | 1.206 | 1.550 | 1.123 | 1.654 | 1.038 | 1.767 | 0.953 | 1.886 |
| 26 | 1.302 | 1.461 | 1.224 | 1.553 | 1.143 | 1.652 | 1.062 | 1.759 | 0.979 | 1.873 |
| 27 | 1.316 | 1.469 | 1.240 | 1.556 | 1.162 | 1.651 | 1.084 | 1.753 | 1.004 | 1.861 |
| 28 | 1.328 | 1.476 | 1.255 | 1.560 | 1.181 | 1.650 | 1.104 | 1.747 | 1.028 | 1.850 |
| 29 | 1.341 | 1.483 | 1.270 | 1.563 | 1.198 | 1.650 | 1.124 | 1.743 | 1.050 | 1.841 |
| 30 | 1.352 | 1.489 | 1.284 | 1.567 | 1.214 | 1.650 | 1.143 | 1.739 | 1.071 | 1.833 |
| 31 | 1.363 | 1.496 | 1.297 | 1.570 | 1.229 | 1.650 | 1.160 | 1.735 | 1.090 | 1.825 |
| 32 | 1.373 | 1.502 | 1.309 | 1.574 | 1.244 | 1.650 | 1.177 | 1.732 | 1.109 | 1.819 |
| 33 | 1.383 | 1.508 | 1.321 | 1.577 | 1.258 | 1.651 | 1.193 | 1.730 | 1.127 | 1.813 |
| 34 | 1.393 | 1.514 | 1.333 | 1.580 | 1.271 | 1.652 | 1.208 | 1.728 | 1.144 | 1.808 |
| 35 | 1.402 | 1.519 | 1.343 | 1.584 | 1.283 | 1.653 | 1.222 | 1.726 | 1.160 | 1.803 |
| 36 | 1.411 | 1.525 | 1.354 | 1.587 | 1.295 | 1.654 | 1.236 | 1.724 | 1.175 | 1.799 |
| 37 | 1.419 | 1.530 | 1.364 | 1.590 | 1.307 | 1.655 | 1.249 | 1.723 | 1.190 | 1.795 |
| 38 | 1.427 | 1.535 | 1.373 | 1.594 | 1.318 | 1.656 | 1.261 | 1.772 | 1.204 | 1.792 |
| 39 | 1.435 | 1.540 | 1.382 | 1.597 | 1.328 | 1.658 | 1.273 | 1.722 | 1.218 | 1.789 |

Table 7b: Continued

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 1.442 | 1.544 | 1.391 | 1.600 | 1.338 | 1.659 | 1.285 | 1.721 | 1.230 | 1.786 |
| 45 | 1.475 | 1.566 | 1.430 | 1.615 | 1.383 | 1.666 | 1.336 | 1.720 | 1.287 | 1.776 |
| 50 | 1.503 | 1.585 | 1.462 | 1.628 | 1.421 | 1.674 | 1.378 | 1.721 | 1.355 | 1.771 |
| 55 | 1.528 | 1.601 | 1.490 | 1.641 | 1.452 | 1.681 | 1.414 | 1.724 | 1.374 | 1.768 |
| 60 | 1.549 | 1.616 | 1.514 | 1.652 | 1.480 | 1.689 | 1.444 | 1.727 | 1.408 | 1.767 |
| 65 | 1.567 | 1.629 | 1.536 | 1.662 | 1.503 | 1.696 | 1.471 | 1.731 | 1.438 | 1.767 |
| 70 | 1.583 | 1.641 | 1.554 | 1.672 | 1.525 | 1.703 | 1.494 | 1.735 | 1.464 | 1.768 |
| 75 | 1.598 | 1.652 | 1.571 | 1.680 | 1.543 | 1.709 | 1.515 | 1.739 | 1.487 | 1.770 |
| 80 | 1.611 | 1.662 | 1.586 | 1.688 | 1.560 | 1.715 | 1.534 | 1.743 | 1.507 | 1.772 |
| 85 | 1.624 | 1.671 | 1.600 | 1.696 | 1.575 | 1.721 | 1.550 | 1.747 | 1.525 | 1.774 |
| 90 | 1.635 | 1.679 | 1.612 | 1.703 | 1.589 | 1.726 | 1.566 | 1.751 | 1.542 | 1.776 |
| 95 | 1.645 | 1.687 | 1.623 | 1.709 | 1.602 | 1.732 | 1.579 | 1.755 | 1.557 | 1.778 |
| 100 | 1.654 | 1.694 | 1.634 | 1.715 | 1.613 | 1.736 | 1.592 | 1.758 | 1.571 | 1.780 |
| 150 | 1.720 | 1.746 | 1.706 | 1.760 | 1.693 | 1.774 | 1.769 | 1.788 | 1.665 | 1.802 |
| 200 | 1.758 | 1.778 | 1.748 | 1.789 | 1.738 | 1.779 | 1.728 | 1.810 | 1.718 | 1.820 |

**Table 7b_ Continued**

| k= 6 | | k= 7 | | k= 8 | | k= 9 | | k=10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dL | dU | dL | dU | dL | DU | dL | dU | dl | dU |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.203 | 3.005 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.268 | 2.832 | 0.171 | 3.149 | - | - | - | - | - | - |
| 0.328 | 2.692 | 0.230 | 2.985 | 0.147 | 3.266 | - | - | - | - |
| 0.389 | 2.572 | 0.286 | 2.848 | 0.200 | 3.111 | 0.127 | 3.360 | - | - |
| 0.447 | 2.472 | 0.343 | 2.727 | 0.251 | 2.979 | 0.175 | 3.216 | 0.111 | 3.438 |
| 0.502 | 2.388 | 0.398 | 2.624 | 0.304 | 2.860 | 0.222 | 3.090 | 0.155 | 3.304 |
| 0.554 | 2.318 | 0.451 | 2.537 | 0.356 | 2.757 | 0.272 | 2.975 | 0.198 | 3.184 |
| 0.603 | 2.257 | 0.502 | 2.461 | 0.407 | 2.667 | 0.321 | 2.873 | 0.244 | 3.073 |
| 0.649 | 2.206 | 0.459 | 2.396 | 0.456 | 2.589 | 0.369 | 2.783 | 0.290 | 2.974 |
| 0.692 | 2.162 | 0.595 | 2.339 | 0.502 | 2.521 | 0.416 | 2.704 | 0.336 | 2.885 |
| 0.732 | 2.124 | 0.637 | 2.290 | 0.547 | 2.460 | 0.461 | 2.633 | 0.380 | 2.806 |
| 0.769 | 2.090 | 0.677 | 2.246 | 0.588 | 2.407 | 0.504 | 2.571 | 0.424 | 2.734 |
| 0.804 | 2.061 | 0.715 | 2.208 | 0.628 | 2.360 | 0.545 | 2.514 | 0.465 | 2.670 |
| 0.837 | 2.035 | 0.751 | 2.174 | 0.666 | 2.318 | 0.584 | 2.464 | 0.506 | 2.613 |
| 0.868 | 2.012 | 0.784 | 2.144 | 0.702 | 2.280 | 0.621 | 2.419 | 0.544 | 2.560 |
| 0.897 | 1.992 | 0.816 | 2.117 | 0.735 | 2.246 | 0.657 | 2.379 | 0.581 | 2.513 |
| 0.925 | 1.974 | 0.845 | 2.093 | 0.767 | 2.216 | 0.691 | 2.342 | 0.616 | 2.470 |
| 0.951 | 1.958 | 0.874 | 2.071 | 0.798 | 2.188 | 0.723 | 2.309 | 0.650 | 2.431 |
| 0.975 | 1.944 | 0.900 | 2.052 | 0.826 | 2.164 | 0.753 | 2.278 | 0.682 | 2.396 |
| 0.998 | 1.931 | 0.926 | 2.034 | 0.854 | 2.141 | 0.782 | 2.251 | 0.712 | 2.363 |
| 1.020 | 1.920 | 0.950 | 2.018 | 0.879 | 2.120 | 0.810 | 2.226 | 0.741 | 2.333 |
| 1.041 | 1.909 | 0.972 | 2.004 | 0.904 | 2.102 | 0.836 | 2.203 | 0.769 | 2.306 |
| 1.061 | 1.900 | 0.994 | 1.991 | 0.927 | 2.085 | 0.861 | 2.181 | 0.795 | 2.281 |
| 1.080 | 1.891 | 1.015 | 1.979 | 0.950 | 2.069 | 0.885 | 2.162 | 0.821 | 2.257 |
| 1.097 | 1.884 | 1.034 | 1.967 | 0.971 | 2.054 | 0.908 | 2.144 | 0.845 | 2.236 |
| 1.114 | 1.877 | 1.053 | 1.957 | 0.991 | 2.041 | 0.930 | 2.127 | 0.868 | 2.216 |
| 1.131 | 1.870 | 1.071 | 1.948 | 1.011 | 2.029 | 0.951 | 2.112 | 0.891 | 2.198 |
| 1.146 | 1.864 | 1.088 | 1.939 | 1.029 | 2.017 | 0.970 | 2.098 | 0.912 | 2.180 |
| 1.161 | 1.859 | 1.104 | 1.932 | 1.047 | 2.007 | 0.990 | 2.085 | 0.932 | 2.164 |

**Table 7b: Continued**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.175 | 1.854 | 1.120 | 1.924 | 1.064 | 1.997 | 1.008 | 2.072 | 0.945 | 2.149 |
| 1.238 | 1.835 | 1.189 | 1.895 | 1.139 | 1.958 | 1.089 | 2.002 | 1.038 | 2.088 |
| 1.291 | 1.882 | 1.246 | 1.875 | 1.201 | 1.930 | 1.156 | 1.986 | 1.110 | 2.044 |
| 1.334 | 1.814 | 1.294 | 1.861 | 1.253 | 1.909 | 1.212 | 1.959 | 1.170 | 2.010 |
| 1.372 | 1.808 | 1.335 | 1.850 | 1.298 | 1.894 | 1.260 | 1.939 | 1.222 | 1.984 |
| 1.404 | 1.805 | 1.370 | 1.843 | 1.336 | 1.882 | 1.301 | 1.923 | 1.266 | 1.964 |
| 1.433 | 1.802 | 1.401 | 1.837 | 1.369 | 1.873 | 1.337 | 1.910 | 1.305 | 1.948 |
| 1.458 | 1.801 | 1.428 | 1.834 | 1.399 | 1.867 | 1.369 | 1.901 | 1.339 | 1.935 |
| 1.480 | 1.801 | 1.453 | 1.831 | 1.425 | 1.861 | 1.397 | 1.893 | 1.369 | 1.925 |
| 1.500 | 1.801 | 1.474 | 1.829 | 1.448 | 1.857 | 1.422 | 1.886 | 1.396 | 1.916 |
| 1.518 | 1.801 | 1.494 | 1.827 | 1.469 | 1.854 | 1.445 | 1.881 | 1.420 | 1.909 |
| 1.535 | 1.802 | 1.512 | 1.827 | 1.489 | 1.852 | 1.465 | 1.877 | 1.442 | 1.903 |
| 1.550 | 1.803 | 1.528 | 1.826 | 1.506 | 1.850 | 1.484 | 1.874 | 1.462 | 1.898 |
| 1.651 | 1.817 | 1.637 | 1.832 | 1.622 | 1.847 | 1.608 | 1.862 | 1.594 | 1.877 |
| 1.707 | 1.831 | 1.697 | 1.841 | 1.686 | 1.852 | 1.675 | 1.863 | 1.665 | 1.874 |

## Table 7b – Continued

| n | k=11 | | k=12 | | k=13 | | k=14 | | k=15 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dl | dU |
| 16 | 0.098 | 3.503 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 17 | 0.138 | 3.378 | 0.087 | 3.557 | - | - | - | - | - | - |
| 18 | 0.177 | 3.265 | 0.123 | 3.441 | 0.078 | 3.603 | - | - | - | - |
| 19 | 0.220 | 3.159 | 0.160 | 3.335 | 0.111 | 3.496 | 0.070 | 3.642 | - | - |
| 20 | 0.263 | 3.063 | 0.200 | 3.234 | 0.145 | 3.395 | 0.100 | 3.542 | 0.063 | 3.676 |
| 21 | 0.307 | 2.976 | 0.240 | 3.141 | 0.182 | 3.300 | 0.132 | 3.448 | 0.091 | 3.583 |
| 22 | 0.349 | 2.897 | 0.281 | 3.057 | 0.220 | 3.211 | 0.166 | 3.358 | 0.120 | 3.495 |
| 23 | 0.391 | 2.826 | 0.322 | 2.979 | 0.259 | 3.128 | 0.202 | 3.272 | 0.153 | 3.409 |
| 24 | 0.431 | 2.761 | 0.362 | 2.908 | 0.297 | 3.053 | 0.239 | 3.193 | 0.186 | 3.327 |
| 25 | 0.470 | 2.702 | 0.400 | 2.844 | 0.335 | 2.983 | 0.275 | 3.119 | 0.221 | 3.251 |
| 26 | 0.508 | 2.649 | 0.438 | 2.784 | 0.373 | 2.919 | 0.312 | 3.051 | 0.256 | 3.179 |
| 27 | 0.544 | 2.600 | 0.475 | 2.730 | 0.409 | 2.859 | 0.348 | 2.987 | 0.291 | 3.112 |
| 28 | 0.578 | 2.555 | 0.510 | 2.680 | 0.445 | 2.805 | 0.383 | 2.928 | 0.325 | 3.050 |
| 29 | 0612 | 2.515 | 0.544 | 2.634 | 0.479 | 2.755 | 0.418 | 2.874 | 0.359 | 2.992 |
| 30 | 0.643 | 2.477 | 0.577 | 2.592 | 0.512 | 2.708 | 0.451 | 2.823 | 0.392 | 2.937 |
| 31 | 0.674 | 2.443 | 0.608 | 2.553 | 0.545 | 2.665 | 0.484 | 2.776 | 0.425 | 2.987 |
| 32 | 0.703 | 2.411 | 0.638 | 2.517 | 0.576 | 2.625 | 0.515 | 2.733 | 0.457 | 2.840 |
| 33 | 0.731 | 2.382 | 0.668 | 2.484 | 0.606 | 2.588 | 0.546 | 2.692 | 0.488 | 2.796 |
| 34 | 0.758 | 2.355 | 0.695 | 2.454 | 0.634 | 2.554 | 0.575 | 2.654 | 0.518 | 2.754 |
| 35 | 0.783 | 2.330 | 0.722 | 2.425 | 0.662 | 2.521 | 0.604 | 2.619 | 0.547 | 2.716 |
| 36 | 0.808 | 2.306 | 0.748 | 2.398 | 0.689 | 2.492 | 0.631 | 2.586 | 0.575 | 2.680 |
| 37 | 0.831 | 2.285 | 0.772 | 2.374 | 0.714 | 2.464 | 0.657 | 2.555 | 0.602 | 2.646 |
| 38 | 0.854 | 2.265 | 0.796 | 2.351 | 0.739 | 2.438 | 0.683 | 2.526 | 0.628 | 2.614 |
| 39 | 0.875 | 2.246 | 0.819 | 2.329 | 0.763 | 2.413 | 0.707 | 2.499 | 0.653 | 2.585 |
| 40 | 0.896 | 2.228 | 0.840 | 2.309 | 0.785 | 2.391 | 0.731 | 2.473 | 0.678 | 2.557 |
| 45 | 0.988 | 2.156 | 0.938 | 2.225 | 0.887 | 2.296 | 0.838 | 2.367 | 0.788 | 2.439 |
| 50 | 1.064 | 2.103 | 1.019 | 2.163 | 0.973 | 2.225 | 0.927 | 2.287 | 0.882 | 2.350 |
| 55 | 1.129 | 2.062 | 1.087 | 2.116 | 1.045 | 2.170 | 1.003 | 2.225 | 0.961 | 2.281 |

**Table 7b : Continued**

| 60 | 1.184 | 2.031 | 1.145 | 2.079 | 1.106 | 2.127 | 1.068 | 2.177 | 1.029 | 2.227 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 1.231 | 2.006 | 1.195 | 2.049 | 1.160 | 2.093 | 1.124 | 2.138 | 1.088 | 2.183 |
| 70 | 1.272 | 1.986 | 1.239 | 2.026 | 1.206 | 2.066 | 1.172 | 2.106 | 1.139 | 2.148 |
| 75 | 1.308 | 1.970 | 1.277 | 2.006 | 1.247 | 2.043 | 1.215 | 2.080 | 1.184 | 2.118 |
| 80 | 1.340 | 1.957 | 1.311 | 1.991 | 1.283 | 2.024 | 1.253 | 2.059 | 1.224 | 2.093 |
| 85 | 1.369 | 1.946 | 1.342 | 1.977 | 1.315 | 2.009 | 1.287 | 2.040 | 1.260 | 2.073 |
| 90 | 1.395 | 1.937 | 1.369 | 1.966 | 1.344 | 1.995 | 1.318 | 2.025 | 1.292 | 2.055 |
| 95 | 1.418 | 1.929 | 1.394 | 1.956 | 1.370 | 1.984 | 1.345 | 2.012 | 1.321 | 2.040 |
| 100 | 1.434 | 1.923 | 1.416 | 1.948 | 1.393 | 1.974 | 1.371 | 2.000 | 1.347 | 2.026 |
| 150 | 1.579 | 1.892 | 1.564 | 1.908 | 1.550 | 1.924 | 1.535 | 1.940 | 1.519 | 1.956 |
| 200 | 1.654 | 1.885 | 1.643 | 1.896 | 1.632 | 1.908 | 1.621 | 1.919 | 1.610 | 1.931 |

**Table 7b – Continued**

| k= 16 | | k= 17 | | k=18 | | k= 19 | | k=20 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dL | dU | dL | dU | dL | dU | dL | dU | dl | dU |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.058 | 3.705 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0.083 | 3.619 | 0.052 | 3.731 | - | - | - | - | - | - |
| 0.110 | 3.535 | 0.076 | 3.650 | 0.048 | 3.753 | - | - | - | - |
| 0.141 | 3.454 | 0.101 | 3.572 | 0.070 | 3.678 | 0.044 | 3.773 | - | - |
| 0.172 | 3.376 | 0.130 | 3.394 | 0.094 | 3.604 | 0.065 | 3.702 | 0.041 | 3.790 |
| 0.205 | 3.303 | 0.160 | 3.420 | 0.120 | 3.531 | 0.087 | 3.632 | 0.060 | 3.724 |
| 0.238 | 3.233 | 0.191 | 3.349 | 0.149 | 3.460 | 0.112 | 3.563 | 0.081 | 3.658 |
| 0.271 | 3.168 | 0.222 | 3.283 | 0.178 | 3.392 | 0.138 | 3.495 | 0.104 | 3.592 |
| 0.305 | 3.107 | 0.254 | 3.219 | 0.208 | 3.327 | 0.166 | 3.431 | 0.129 | 3.528 |
| 0.337 | 3.050 | 0.286 | 3.160 | 0.238 | 3.266 | 0.195 | 3.368 | 0.156 | 3.465 |
| 0.370 | 2.996 | 0.317 | 3.103 | 0.269 | 3.208 | 0.224 | 3.309 | 0.183 | 3.406 |
| 0.401 | 2.946 | 0.349 | 3.050 | 0.299 | 3.153 | 0.253 | 3.252 | 0.211 | 3.348 |
| 0.432 | 2.899 | 0.379 | 3.000 | 0.329 | 3.100 | 0.283 | 3.198 | 0.239 | 3.293 |
| 0.462 | 2.854 | 0.409 | 2.954 | 0.359 | 3.051 | 0.312 | 3.147 | 0.267 | 3.240 |
| 0.492 | 2.813 | 0.439 | 2.910 | 0.388 | 3.005 | 0.340 | 3.099 | 0.295 | 3.190 |
| 0.520 | 2.774 | 0.467 | 2.868 | 0.417 | 2.961 | 0.369 | 3.053 | 0.323 | 3.142 |
| 0.548 | 2.738 | 0.495 | 2.829 | 0.445 | 2.920 | 0.397 | 3.009 | 0.351 | 3.097 |
| 0.575 | 2.703 | 0.522 | 2.792 | 0.472 | 2.880 | 0.424 | 2.968 | 0.378 | 3.054 |
| 0.600 | 2.671 | 0.549 | 2.757 | 0.499 | 2.843 | 0.451 | 2.929 | 0.404 | 3.013 |
| 0.626 | 2.641 | 0.575 | 2.724 | 0.525 | 2.808 | 0.477 | 2.892 | 0.430 | 2.974 |
| 0.740 | 2.512 | 0.692 | 2.586 | 0.644 | 2.659 | 0.598 | 2.733 | 0.553 | 2.807 |
| 0.836 | 2.414 | 0.792 | 2.479 | 0.747 | 2.544 | 0.703 | 2.610 | 0.660 | 2.675 |
| 0.919 | 2.338 | 0.877 | 2.396 | 0.836 | 2.454 | 0.795 | 2.512 | 0.754 | 2.571 |
| 0.990 | 2.278 | 0.951 | 2.330 | 0.913 | 2.382 | 0.874 | 2.434 | 0.836 | 2.487 |
| 1.052 | 2.229 | 1.016 | 2.276 | 0.980 | 2.323 | 0.944 | 2.371 | 0.908 | 2.419 |
| 1.105 | 2.189 | 1.072 | 2.232 | 1.038 | 2.275 | 1.005 | 2.318 | 0.971 | 2.362 |
| 1.153 | 2.156 | 1.121 | 2.195 | 1.090 | 2.235 | 1.058 | 2.275 | 1.027 | 2.315 |
| 1.195 | 2.129 | 1.165 | 2.165 | 1.136 | 2.201 | 1.106 | 2.238 | 1.076 | 2.275 |
| 1.232 | 2.105 | 1.205 | 2.139 | 1.177 | 2.172 | 1.149 | 2.206 | 1.121 | 2.241 |
| 1.266 | 2.085 | 1.240 | 2.116 | 1.213 | 2.148 | 1.187 | 2.179 | 1.160 | 2.211 |
| 1.296 | 2.068 | 1.271 | 2.097 | 1.247 | 2.126 | 1.222 | 2.156 | 1.197 | 2.186 |

Table 7b : Continued

| 1.324 | 2.053 | 1.301 | 2.080 | 1.277 | 2.108 | 1.253 | 2.135 | 1.229 | 2.164 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.504 | 1.972 | 1.489 | 1.989 | 1.474 | 2.006 | 1.458 | 2.023 | 1.443 | 2.040 |
| 1.599 | 1.943 | 1.588 | 1.955 | 1.576 | 1.967 | 1.565 | 1.979 | 1.554 | 1.991 |

**Table 8: Five Percent Significance of $\partial_{4,L}$ and $\partial_{4,U}$ for Regressions with Quarterly Dummy Variable (k = k' + 1)**

| n | k'=1 | | k'= 2 | | k'= 3 | | k'= 4 | | k'= 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $d_{4,L}$ | $d_{4,U}$ | $d_{4,L}$ | $d_{4,U}$ | $d_{4,L}$ | $d_{4,U}$ | $d_{4,L}$ | $d_{4,U}$ | $d_{4,L}$ | $d_{4,U}$ |
| 16 | 0.774 | 0.982 | 0.662 | 1.109 | 0.549 | 1.275 | 0.435 | 1.381 | 0.350 | 1.532 |
| 20 | 0.924 | 1.102 | 0.827 | 1.203 | 0.728 | 1.327 | 0.626 | 1.428 | 0.544 | 1.556 |
| 24 | 1.036 | 1.189 | 0.953 | 1.273 | 0.867 | 1.371 | 0.779 | 1.459 | 0.702 | 1.565 |
| 28 | 1.123 | 1.257 | 1.050 | 1.328 | 0.975 | 1.410 | 0.898 | 1.487 | 0.828 | 1.576 |
| 32 | 1.192 | 1.311 | 1.127 | 1.373 | 1.061 | 1.443 | 0.993 | 1.511 | 0.929 | 1.587 |
| 36 | 1.248 | 1.355 | 1.191 | 1.410 | 1.131 | 1.471 | 1.070 | 1.532 | 1.013 | 1.598 |
| 40 | 1.295 | 1.392 | 1.243 | 1.422 | 1.190 | 1.496 | 1.135 | 1.550 | 1.082 | 1.609 |
| 44 | 1.335 | 1.423 | 1.288 | 1.469 | 1.239 | 1.518 | 1.189 | 1.567 | 1.141 | 1.620 |
| 48 | 1.369 | 1.451 | 1.326 | 1.493 | 1.281 | 1.537 | 1.236 | 1.582 | 1.191 | 1.630 |
| 52 | 1.399 | 1.475 | 1.359 | 1.513 | 1.318 | 1.554 | 1.276 | 1.595 | 1.235 | 1.639 |
| 56 | 1.426 | 1.496 | 1.389 | 1.532 | 1.351 | 1.569 | 1.312 | 1.608 | 1.273 | 1.648 |
| 60 | 1.449 | 1.515 | 1.415 | 1.548 | 1.379 | 1.583 | 1.343 | 1.619 | 1.307 | 1.656 |
| 64 | 1.470 | 1.532 | 1.438 | 1.563 | 1.405 | 1.596 | 1.371 | 1.629 | 1.337 | 1.664 |
| 68 | 1.489 | 1.548 | 1.459 | 1.577 | 1.427 | 1.608 | 1.396 | 1.639 | 1.364 | 1.671 |
| 72 | 1.507 | 1.562 | 1.478 | 1.589 | 1.448 | 1.618 | 1.418 | 1.648 | 1.388 | 1.678 |
| 76 | 1.522 | 1.574 | 1.495 | 1.601 | 1.467 | 1.628 | 1.439 | 1.656 | 1.411 | 1.685 |
| 80 | 1.537 | 1.586 | 1.511 | 1.611 | 1.484 | 1.637 | 1.457 | 1.663 | 1.431 | 1.691 |
| 84 | 1.550 | 1.597 | 1.525 | 1.621 | 1.500 | 1.646 | 1.475 | 1.671 | 1.449 | 1.696 |
| 88 | 1.562 | 1.607 | 1.539 | 1.630 | 1.515 | 1.654 | 1.490 | 1.677 | 1.466 | 1.702 |
| 92 | 1.574 | 1.617 | 1.551 | 1.639 | 1.528 | 1.661 | 1.505 | 1.684 | 1.482 | 1.707 |
| 96 | 1.584 | 1.626 | 1.563 | 1.647 | 1.541 | 1.668 | 1.519 | 1.690 | 1.496 | 1.712 |
| 100 | 1.594 | 1.634 | 1.573 | 1.654 | 1.552 | 1.674 | 1.531 | 1.695 | 1.510 | 1.717 |

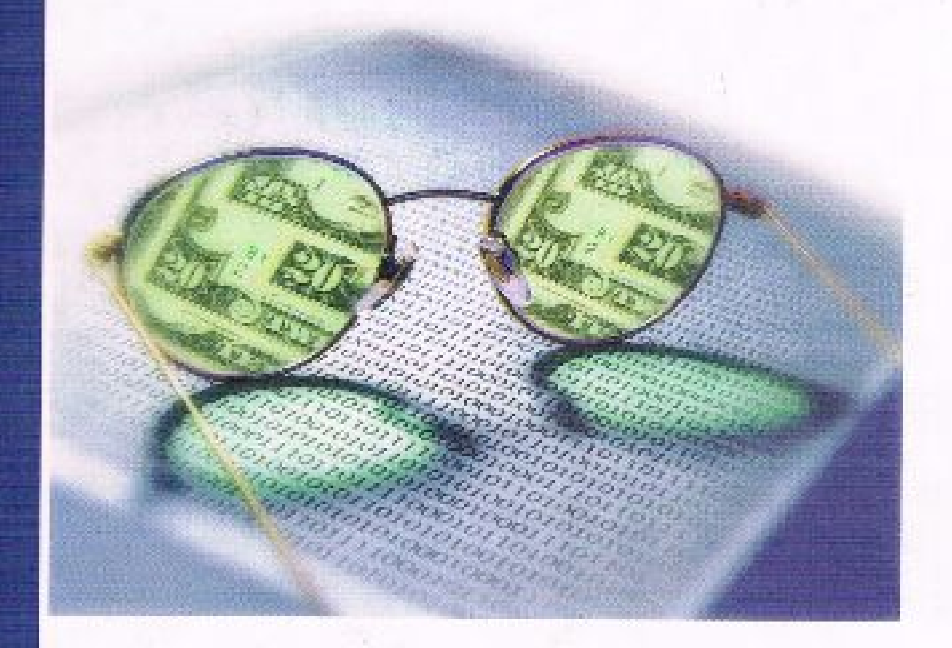


# Introduction to Econometrics

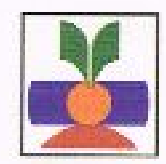
## By

M.Dr. HUSSAIN A. BEKHET
College of administration and Economics
Baghdad University

Dr. SAHAR F. MOHAMMED ALI
College of administration and Economics
Baghdad University




ISBN 9957-12-017-4
9 789957 120177



دار اليـــازوري العـــلمية للنـــشر والتـــوزيع

عمان - الأردن وسط البلد - شارع الملك حسين مقابل مجمع الفحيص التجاري
هاتفاكس : 6626 482 - 4185 461 6 962+ ص.ب : 520646 الرمز البريدي : 11152
www.yazori.com E-mail : info@yazori.com